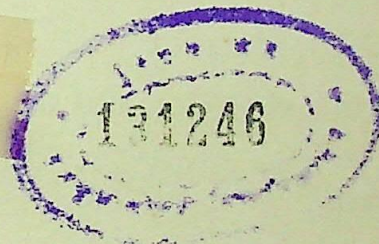
VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 33 January 1990 No. 1-2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विषय-सूची

विषय-सूची

VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 33 April 1990 No. 2

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी, उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

निम्न आवृति पर छिछले ट्रैपों वाले रोधी पदार्थों में वाहक संख्या उच्चावचन

पी० शर्मा, वाई० के० शर्मा तथा एम० पी० सिंह
भौतिकी विभाग, आर० बी० एस० कालेज, आगरा

[प्राप्त—अप्रैल 26, 1989]

सारांश

निम्न आवृति पर छिछले ट्रैपों वाले रोधी पदार्थ के धारा-वोल्टता अभिलक्षण के पूर्ण परास में वाहक संख्या उच्चावचनों का अध्ययन किया गया है। पूर्ण निम्न आवृति रव अभिलक्षण में रव प्रतिरोध तथा वोल्टता उच्चावचनों के लिए स्पेक्ट्रमी घनत्व व्युत्पन्न किये गये हैं। यह देखा जाता है कि नमूने में छिछले ट्रैपों की उपस्थिति धारा प्रवाह के पूरे परास में रव आचरण को बदलने में अत्यन्त प्रभावशाली है।

Abstract

Carrier number fluctuations in insulating materials with shallow traps at low frequency. *By* P. Sharma, Y. K. Sharma and M. P. Singh, Department of Physics, R. B. S. College, Agra.

The carrier number fluctuations are studied in the complete range of current-voltage characteristic of insulating material with shallow traps at low frequency. The noise resistance and spectral density for voltage fluctuations are derived in the complete low frequency noise characteristic. It is observed that the presence of shallow traps in the sample is very effective to change the noise behaviour in the complete range of current flow.

वैद्युत संचालन में उच्चावचनों से ठोस प्रावस्था युक्तियों में $1/f$ रव प्राप्त होता है[1,2]। वाहक संख्या उच्चावचन किसी युक्ति की संवेदन-शीलता तथा सुतथ्यता को प्रभावित करने वाले प्रथम प्रकार के आवृति आश्रित रव को व्यक्त करते हैं। प्रस्तुत विश्लेषण में निम्न आवृति पर रोधी पदार्थ

एकाकी अंतःक्षेपण धारा प्रवाह में वाहक संख्य उच्चावचनों का अध्ययन किया गया है । सामान्य समीकरणों की सहायता से सिद्धान्त प्राप्त किया गया है जिसमें समतलीय संरचना में धारा प्रवाह का वर्णन हुआ है ।[1,4]

सामान्य समीकरण

छिछले ट्रैपों वाले रोधक में धारा प्रवाह तथा प्वायसाँ नियम के अभिलाक्षणिक समीकरणों को निम्नवत् लिखा जाता है

$$J = e\mu nE \tag{1}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\frac{dE}{dx} = n - n_0 \tag{2}$$

जहाँ J धारा घनत्व है, e इलेक्ट्रानिक आवेश का आयाम है, μ धारावाहकों की गतिशीलता है, n तथा n_0 क्रमशः x दूरी पर धारावाहक की सान्द्रता तथा इसके उष्मीय साम्य मान हैं, E विद्युत क्षेत्र शक्ति है तथा θ छिछले ट्रैपों का वर्णन करने वाला प्राचल है । ओमिक स्पर्श के लिए सीमा-प्रतिबन्ध समीकरण (3) द्वारा दिया जाता है ।[3]

$$E(0) = 0 \tag{3}$$

रोधी के आरपार प्रयुक्त वोल्टता

$$V = \int_0^L E(x)\, dx \tag{4}$$

द्वारा व्यक्त की जाती है जहां L युक्ति (device) की लम्बाई है ।

रोधी को लैम्पर्ट तथा मार्क द्वारा[3] वर्णित काल्पनिक संक्रमण तल x_1 की सहायता से दो क्षेत्रों में बाँटा जा सकता है । इस तरह निम्नलिखित सामान्य समीकरण प्राप्त होंगे ।

क्षेत्र I ($0 \leqslant x \leqslant x_1$) : अवकाश आवेश क्षेत्र

$$J = e\mu nE \tag{5}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\frac{dE}{dx} = n \tag{6}$$

$$n(x_1) = n_1(x_1) = n_0 \tag{7}$$

क्षेत्र II ($x_1 \leqslant x \leqslant L$) : ओमिक क्षेत्र

$$J = e\mu\, n_0\, E \tag{8}$$

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\frac{dE}{dx} = 0 \tag{9}$$

दोनों क्षेत्रों में विद्युत क्षेत्र शक्ति का मान समीकरण (5), (6) तथा (8) द्वारा निम्नवत् ज्ञात किया जाता है :

क्षेत्र I :

$$E(x)=\left[\frac{2J}{\mu\theta\epsilon}\right]^{1/2} x^{1/2} \tag{10}$$

क्षेत्र II :

$$E\Omega=\frac{J}{e\mu n_0} \tag{11}$$

समीकरण (6), (7) तथा (10) से संक्रमण तल प्राप्त होता है जो इस प्रकार है :

$$x_1=\frac{\theta\epsilon J}{2e^2\ \mu\ n^2{}_0} \tag{12}$$

संक्रान्तिक धारा तथा संक्रान्तिक वोल्टता उस बिन्दु पर प्राप्त होते हैं जब $x_1=L$ । समीकरण (4), (10) एवं (12) से

$$J_{cr}=\frac{2e^2\ \mu\ n^2{}_0\ L}{\theta\epsilon} \tag{13}$$

$$J_{cr}=\frac{4}{3}\quad\frac{e\ n_0\ L^2}{\theta\epsilon} \tag{14}$$

प्राप्त होते हैं ।

क्षेत्र I में वाहक उच्चावचन के कारण रव

लघु सिग्नल समीकरणों को

$$E=E_0+\triangle E,\quad n=n_1+\Delta n,\quad J=J_0+\triangle J \tag{15}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जहाँ उच्चतर कोटिक पदों की उपेक्षा कर दी जाती है ।

धारा समीकरण (1) से

$$\triangle J=e\mu n\triangle E+e\mu\triangle nE \tag{16}$$

प्राप्त होता है जो बतलाता है कि धारा घनत्व में होने वाले उच्चावचन वाहक घनत्व तथा विद्युतक्षेत्र में होने वाले उच्चावचनों के योगफल द्वारा प्राप्त किये जाते हैं ।

विवृत सरकिट के निर्गम (output) का उपयोग एकाकी अंतःक्षेपण ठोस प्रावस्था डायोड में रव का अध्ययन करने के लिए किया जाता है । यह मान लेने पर कि कैथोड अपेक्षतया लघु अवरोधक (बेरियर) के साथ अंतःक्षेपण सम्पर्क है और ऐनोड वृहत अवरोध-स्पर्श है तो डायोड के ऐनोड पर वाहक घनत्व शून्य होगा अर्थात् $\Delta J=0$.

माना कि $\triangle J=0$ तथा $\triangle n \simeq \delta n_1$ तो समीकरण (16)

$$n_1 \triangle E+E_0\ \delta n_1=0 \tag{17}$$

बन जाता है जहाँ समीकरण (15) प्रयुक्त किया जाता है।

समीकरण (6), (15) तथा (17) से विद्युत क्षेत्र शक्ति के उच्चावचन प्राप्त होते हैं जो निम्नवत् हैं—

$$\frac{\theta\epsilon}{e}\frac{dE}{dx}\triangle E+E_0\ \delta n_1=0 \tag{18}$$

समीकरण (18) के समाकलन से

$$V(x)\ \delta n_1+\frac{\theta\epsilon}{e}\ E(x)\ \Delta E=a \tag{19}$$

प्राप्त होता है जहाँ a समाकलन अचर है तथा

$$\int E_0\ dx=V(x) \tag{20}$$

समाकलन अचर $a=0$ को सीमा-प्रतिबन्ध

$$E(x)=0,\ V(x)=0 \quad x=0 \text{ पर}$$

प्राप्त करते हैं। क्षेत्र I में किसी बिन्दु x पर उच्चावचन वाले विद्युत क्षेत्र को समीकरण (19) से निम्नलिखित रूप में प्राप्त किया जाता है—

$$\triangle E(x)=-\frac{e}{\theta\epsilon}\ \frac{V(x)}{E(x)}\ \delta n_1 \tag{21}$$

क्षेत्र I में स्थिति x पर सम्प्रयुक्त वोल्टता का मान समीकरण (4) तथा (10) से निम्नवत् व्युत्पन्न किया जाता है

$$V(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{2J}{\theta\in\mu}\right)^{1/2} x^{3/2} \tag{22}$$

समीकरण (10) से तथा (22) से क्रमशः $E(x)$ तथा $V(x)$ के मान रखने पर समीकरण (21) का रूप इस प्रकार हो जाता है

$$\triangle E(x)=-\left(\frac{2ex}{3\theta\epsilon}\right)\delta n_1 \tag{23}$$

क्षेत्र I की सीमाओं के भीतर समीकरण (23) के समाकलन से क्षेत्र I के आर-पार वोल्टता उच्चावचन प्राप्त होता है

$$\triangle V(x_1)=-\frac{1}{3}\ \frac{e x_1^2}{\theta\epsilon}\ \delta n_1 \tag{23}$$

जहाँ x_1 का मान समीकरण (12) द्वारा दिया जाता है।

समीकरण (24) का फूरियर विश्लेषण करने पर क्षेत्र I के आर-पार वोल्टता उच्चावचनों की स्पेक्ट्रमी तीव्रता निम्नवत् प्राप्त होती है —

$$S_{V_I}(f)=4\,kT\,R_{n_1}=\frac{e^2\,x^4{}_1}{9\,\theta^2\,\epsilon^2}\,S_{n_1}(f) \tag{25}$$

जहाँ k बोल्ट्ज़मान अचर है, T जालक ताप है, R_{n_1} अवकाश आवेश क्षेत्र I का रव प्रतिरोध है और $S_{n_1}(f)$ विभव निम्निष्ठ में वाहक घनत्व उच्चावचनों की स्पेक्ट्रमी तीव्रता है। समीकरण (12) तथा (25) से $S_{V_I}(f)$ के लिए जो व्यंजक प्राप्त होगा वह निम्नवत् होगा—

$$S_{V_I}(f)=\frac{\theta^2\,\epsilon^2\,J^4}{144\,e^6\,n^8{}_0\,\mu^4}\,S_{n_1}(f) \tag{26}$$

वाहक उच्चावचन की स्पेक्ट्रमी तीव्रता का मान निम्नांकित समीकरण द्वारा दिया जाता है[2]

$$S_{n_1}(f)=2\bar{n}_1=\frac{2\,SJ}{e} \tag{27}$$

जहाँ n_1 प्वायसां वितरण के अनुसार है तथा S क्षेत्रफल है अनुप्रस्थ काट का। समीकरण (26) तथा (27) से स्पेक्ट्रमी तीव्रता निम्नवत् हो जाती है

$$S_{V_I}(f)=4\,kT\,R_{n_1}=\frac{e^2\,\epsilon^2\,J^5\,S}{72\,e^7\,\mu^4\,n^8{}_0} \tag{28}$$

जिससे

$$R_{n_1}=\frac{e^2\,\epsilon^2\,J^5\,S}{288\,e^7\,\mu^4\,n^8{}_0\,kT} \tag{29}$$

प्राप्त होता है।

क्षेत्र II में वाहक उच्चावचनों के कारण रव

क्षेत्र II के धारा समीकरण (8) के रैखिकीकरण से क्षेत्र II में किसी बिन्दु x पर विद्युत क्षेत्र में उच्चावचन

$$\triangle E(x)=-\frac{E_0\,\delta n_0}{n_0} \tag{30}$$

के रूप में प्राप्त होता है जहाँ समीकरण (15) का उपयोग किया गया है।

क्षेत्र I की सीमाओं के अन्तर्गत समीकरण (30) के समाकलन से

$$\triangle V=\int_{x_1}^{L} \triangle E(x)\, dx=-\frac{J}{e\mu\, n^2_0}\,[L-x_1]\,\delta n_0 \tag{31}$$

प्राप्त होता है जहाँ (11) तथा (30) का उपयोग किया जाता है।

समीकरण (31) के फूरियर विश्लेषण से क्षेत्र II के आर-पार वोल्टता उच्चावचनों की स्पेक्ट्रमी तीव्रता निम्नवत् प्राप्त होती है

$$S_{V_{II}}(f)=4\,kT\,R_{n_2}=\left[\frac{J(L-x_1)}{e\mu\, n^2_0}\right]^2 S_{n_0}(f) \tag{32}$$

जहाँ

$$S_{n_0}(f)=\frac{2\,J\,S}{e} \tag{33}$$

समीकरण (32) में समीकरण (12) तथा (33) प्रतिस्थापित करने पर क्षेत्र II के आर-पार स्पेक्ट्रमी तीव्रता तथा रव-प्रतिरोधकता

$$S_{V_{II}}(f)=4\,kT\,R_{n_2}=\frac{2\,J^3S}{e^3\,\mu^2\,n^4_0}\left[L-\frac{e\in J}{2\,e^2\,\mu\,n^2_0}\right]^2 \tag{34}$$

$$R_{n_2}=\frac{J^3S}{2\,e^3\mu^2\,n^4_0\,kT}\left[L-\frac{\theta\in J}{2e^2\,\mu\,n^2_0}\right]^2 \tag{35}$$

हो जाते हैं। रोधी में उच्चावचन के कारण उत्पन्न वोल्टता उच्चावचनों का सम्पूर्ण स्पेक्ट्रमी घनत्व समीकरण (36) द्वारा दिया जाता है

$$S_V(f)=S_{V_I}(f)+S_{V_{II}}(f)=4\,k\,T\,R_n \tag{36}$$

जहाँ

$$R_n=R_{n_1}+R_{n_2} \tag{37}$$

(28), (29), (34) तथा (37) समीकरणों से निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होते हैं

$$S_V(f)=\left[\frac{37}{72}\;\frac{\theta^2\in^2 J^5\,S}{e^7\,\mu^4\,n^8_0}+\frac{2\,J^3\,L^2\,S}{e^3\,\mu^2\,n^4_0}-\frac{2\theta\in J^4L\,S}{e^5\,\mu^3\,n^6_0}\right] \tag{38}$$

$$R_n=\frac{1}{4\,k\,T}\left[\frac{37}{72}\;\frac{\theta^3\in^2 J^5\,S}{e^7\,\mu^4\,n^8_0}+\frac{2\,J^3\,L^2\,S}{e^3\,\mu^2\,n^4_0}-\frac{2\theta\in J^4L\,S}{e^5\,\mu^3\,n^6_0}\right] \tag{39}$$

पूर्ण रव के अभिलक्षण

सम्पूर्ण रव अभिलक्षण को चार पृथक रव क्षेत्रों में विभाजित किया जा सकता है जो निम्नवत् हैं :

(a) धारा के अत्यल्प अंतःक्षेपण स्तर पर रव

पूर्ण धारा-वोल्टता अभिलक्षण का शुभारम्भ असली ओह्म क्षेत्र से शुरू होता है जहाँ केवल क्षेत्र II होता है। क्षेत्र II में हुए वाहक घनत्व उच्चावचन निम्न आवृति रव में हाथ बँटाते हैं। अत्यन्त निम्न धारा पर रव प्रतिरोध तथा वोल्टता उच्चावचनों का स्पेक्ट्रमी घनत्व समीकरण (34) तथा (35) से निम्नवत् व्युत्पन्न किये जाते हैं :

$$S_{Vt}(f)=4\ k\ T\ R_t=\frac{2\ J^3\ L^2\ S}{e^3\ \mu^2\ n^4_0} \tag{40}$$

$$R_t=\frac{J^3\ L^2\ S}{2\ e^3\ \mu^2\ n^4_0\ kT} \tag{41}$$

जहाँ क्षेत्र I के योगदान की उपेक्षा की जाती है।

(b) धारा के निम्न अन्तःक्षेपण स्तर पर रव

धारा का अंतःक्षेपण स्तर इतना उठ जाता है कि धारा प्रवाह में दोनों क्षेत्र अपना हाथ बँटाते हैं। ओमिक क्षेत्र में ही रव के व्यंजक समीकरण (38) तथा (39) से निम्नवत् व्युत्पन्न किये जाते हैं

$$S_{V_0}(f)=4\ k\ T\ R_0$$

$$-\left[\frac{37}{72}\frac{\theta^2\ \in^2\ J^5 S}{e^7\ \mu^4\ n^8_0}+\frac{2\ J^3\ L^2\ S}{e^2\ \mu^2\ n^4_0}-\frac{2\ \theta \in J^4 L\ S}{e^5\ \mu^3\ n^6_0}\right] \tag{42}$$

$$R_0=\frac{1}{4k\ T}\left[\frac{37}{72}\frac{\theta^2\ \in^2\ J^5\ S}{e^7\ \mu^4\ n^8_2}+\frac{2\ J^3\ L^2\ S}{e^3\ \mu^2\ n^4_0}-\frac{2\theta \in J^4\ L\ S}{e^5\ \mu^3\ n^6_0}\right] \tag{43}$$

(c) क्रान्तिक धारा पर रव

क्रान्तिक धारा पर संक्रमण तल x_1 ऐनोड तक पहुँच जाता है। क्षेत्र I में उपस्थित वाहक घनत्व उच्चावचनों द्वारा रव का एककीकरण होता है। वोल्टता उच्चावचनों का क्रांतिक स्पेक्ट्रमी घनत्व तथा क्रांतिक रव प्रतिरोध को समीकरण (25) तथा (29) द्वारा निम्नवत् व्युत्पन्न किया जाता है—

$$S_{V_{cr}}(f)=4\ k\ T\ R_{cr}=\frac{4\ e^3\mu\ n^2_0\ L^5\ S}{9\ \theta^3\ \epsilon^3} \tag{44}$$

$$R_{cr}=\frac{e^3\mu\ n^3_0\ L^5 S}{9\ \theta^3\ \epsilon^3\ kT} \tag{45}$$

जहाँ पर क्रांतिक धारा J_{c_r} का मान समीकरण (13) से प्रतिस्थापित किया जाता है।

(d) धारा के उच्च अन्तःक्षेपण स्तर पर रव

रोधी में केवल क्षेत्र I उपस्थित है और संक्रमण तल x_1 नमूने से विलग हो जाता है। इस

प्रक्षेत्र में वाहक घनत्व उच्चावचन अवकाश आवेश द्वारा प्राप्त किये जाते हैं। स्पेक्ट्रमी घनत्व तथा रव प्रतिरोध को समीकरण (25) तथा (29) से निम्नवत् व्युत्पन्न किया जाता है

$$S_{V_h}(f)=4\,k\,T\,R_h=\frac{2\,J\,e\,S\,L^4}{9\,\theta^1\,\epsilon^3} \tag{46}$$

$$R_h=\frac{e\,J\,S\,L^4}{18\,k\,T\,\theta^2\,\epsilon^2} \tag{47}$$

जिनसे पता चलता है कि उच्च अंतःक्षेपण स्तर पर रव प्रत्यक्ष समानुपाती होता है धारा घनत्व के।

विवेचना

प्रस्तुत विश्लेषण में रोधी पदार्थ के लिए जो छिछले ट्रैपों से युक्त हैं और धारा-वोल्टता अभिलक्षणों के पूर्ण परास से निम्न आवृति पर वाहक संख्या उच्चावचनों के लिए वैश्लेषिक व्यंजक व्युत्पन्न किये गये हैं। पूर्ण रव स्पेक्ट्रम दिखलाता है कि निम्न आवृति रव धारा के उच्च अंतःक्षेपण स्तर पर अत्यधिक कम हो जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि डायोड में विद्यमान अवकाश आवेश द्वारा रव संदमित होता है।

निर्देश

1. हूगे, एफ० एन०, क्लाइनपेनिंग, टी० जी० एन० तथा वन्डाम्ये, एल० के० जे०, Rept. Prog. Phys. 1981, **44**, 479.

2. वानडर जील ए०, Fluctuation Phenomena in Semiconductors, London : Butterworths 1959.

3. लैम्पटे, एम० ए० तथा मार्क, पी०, Current injection in solids, Academic Press, New York 1970.

4. शर्मा, वाई० के०, Phys. Rev. 1974, **B10**, 3273.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 1, 1990

प्रतिचित्र के अनुक्रम का अद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय

प्रतिमा रावत

गणित विभाग, डा० हरिसिंह गौर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—जून 6, 1989]

सारांश

पूर्ण दूरीक समष्टि में प्रतिचित्रों के अनुक्रम के लिए अद्वितीय स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध किया जावेगा।

Abstract

A unique fixed theorem of sequence of maps. *By* Pratima Rawat, Department of Mathematics, Dr. H. S. Gour Viswavidyalaya, Sagar.

In the present note we shall prove unique fixed point theorem for sequence of maps in complete metric space which generalize the result of Pachapatte[1].

पचपट्टे ने [1] निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है :

माना S तथा T किसी अरिक्त पूर्ण दूरीक समष्टि का आत्म-प्रतिचित्रण है जो निम्नलिखित असमिका की तुष्टि करता है .

$$d(Sx, Ty) \leqslant q \, \frac{\max\{[d(x, y)]^2, [d(x, Sx)]^2, [d(y, Ty)]^2, \frac{1}{2}[d(x, Ty)]^2 \, \frac{1}{2}[d(y, Sx)]^2\}}{[d(x, Sx)+d(y, Ty)]}$$

x में समस्त x, y के लिए जिसके लिए

$$d(x, Sx)+d(Y, Ty) \neq 0$$

$q \in (0, 1)$ तब S तथा T का एक उभयनिष्ठ स्थिर बिन्दु होता है।

अब हम पूर्ण दूरीक समष्टि में प्रतिचित्रणों के अनुक्रम के लिए एक प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय :

माना T_0 तथा $\{Tn : n \in I^+\}$ (I^+ धन पूर्णाङ्कों के सेट का द्योतक है) अरिक्त पूर्ण दूरीक समष्टि X का प्रतिचित्रण हो जिससे असमिका की स्वत:तुष्टि से लें।

$$\max \{[d(x, y)]^2, [d(x,Tx)]^2, [d(y, T_n y)]^2$$

(i) $$d(T_0 x, T_n y) \leqslant q \frac{1/2 [d(x, T_n y]^2, 1/2[d(y, T_0 x)]^2\}}{[d(x, T_0 x)+d(y, T_n y)]}$$

x में संमस्तw, y के लिए। प्रत्येक $n=1, 2$.........जिसके लिए $d(x, T_0 x)+d(y, T_n y) \neq 0$, $q \in (0, 1)$ तो X में ऐसा विन्दु Z विद्यमान रहता है जिससे $T_n z=z$ जो प्रत्येक $n=0, 1, 2,$......के लिए तथा याहच्छिक $x_0 \in X$, के लिए अनुक्रम x_0, $x_n=T_0 x_0$, $x_2=T_1 x_1$, $x_3=T_0 x_2$........$x_{2n-1}=T_0 x_{2n-1}$, $x_{2n}=T_n x_{2n-1}$, $x_{2n+1}=T_0 x_{2n}$, अभिसरण करता है z में और यदि $d(x, T_0 x)+d(y, T_n y)=0$, तो z अद्वितीय स्थिर बिन्दु है T_n का $n=0, 1, 2$......के लिए।

उपपत्ति :

सर्वप्रथम हम सिद्ध करेंगे कि (ii) द्वारा परिभाषित अनुक्रम $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है। (i) से $x=x_{2n-2}$ तथा $y=x^2{}_{n-1}$ के लिए हमें

$$d(x_{2n-1}, x_{2n})=d(T_0 x_{2n-2}, T_n x_{2n-1})$$

$$\max \{[d(x_{2n-n}, x_{2n-1}]^2, [d(x_{2n-2}, x_{2n-1}]^2, [dx_{2n-1}, x_{2n})]^2,$$

$$\leqslant q \frac{1/2[d(x_{2n-2}, x_{2n})]^2, 1/2[d(x_{2n-1}, x_{2n-1})]^2\}}{d(x_{2n-2}, x_{2n-1})+d(x_{2n-1}, x_{2n})}$$

$$\max \{[d_{2n-2}, x_{2n-1})]^2, [d(x_{2n-2}, x_{2n-1})]^2$$

$$\leqslant q \frac{[d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2, 1/2[d(x_{2n-2}, x_{2n-1})[^2+d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2\}}{d(x_{2n-1}, x_{2n})}$$

प्राप्त होता है जब

$$x_n\ (x_{2n+1}) \qquad \text{(iii)}$$

यदि सम्भव हो तो (iii) के दायें पक्ष को $[d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2$ हो जाय तो (iii) से हमें

$$[d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q \frac{[d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2}{[d(x_{2n-2}, x_{2n-2})+d(x_{2n-1}, x_{2n})]}$$

अथवा

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant qd(x_{2n-1}, x_{2n})$$

एक विरोध प्राप्त होता है जिससे

$$d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \nless d(x_{2n-1}, x_{2n}) \qquad \text{(iv)}$$

यदि सम्भव हो तो माना कि

$$d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) \leqslant \frac{1/2[d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2}{d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})}$$

$$< \tfrac{1}{2}[d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})]$$

अथवा

$$d(x_{2n-2}, x_{1n-1}) < d(x_{2n-1}, x_{2n})$$

जो (iv) से सम्भव नहीं। अत: (iii) से हमें

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant qd(x_{2n-2}, x_{2n-1}).$$

प्राप्त होता है। इसी तरह हम दिखला सकते हैं कि

$$d(x_{2n-2}, x_{2n-1}) = d(T_n x_{2n-3}, T_0 x_{2n-2})$$

$$\leqslant qd(x_{2n-3}, x_{2n-2})$$

इसी विधि से अग्रसर होने पर

$$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant qd(x_{2n-2}, x_{2n-1})$$

$$\leqslant q^2 d(x_{2n-3}, x_{2n-2})$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$d(x_{2n-1}, x_{2n}) \leqslant q^{2n-1} d(x_0, x_1)$ समस्त $n=1, 2, \ldots\ldots$ के लिए। परिगणनों से हम यह दिखला सकते हैं कि $k>n$ के लिए निम्नलिखित असमिकायें लागू होती हैं—

$$d(x_n, x_{n+k}) \leqslant \sum_{i=1}^{K} d(x_{2+i-1}, x_{n+i})$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{K} q^{n+i-1} d(x_0, x_1)$$

$$\leqslant \frac{q^n}{1-q} d(x_0 . x_1)$$

चूँकि $q<1$. उपर्युक्त असमिका का दाँया पक्ष ज्यों ज्यों $n \to 0$ त्यों त्यों शून्य के निकट पहुँचता है अतएव अनुक्रम $\{x_n\}$ कौशी अनुक्रम है।

चूंकि X पूर्ण है अत: X में एक ऐसा बिन्दु z विद्यमान है जिससे कि

$$\lim_{n \to \infty} x_n = z \tag{v}$$

(i) तथा त्रिकोणीय असमिका का उपयोग करने पर यदि $z \neq T_0 z$ तो हमें

$$d(z, T_0 z) \leqslant d(z, x_{2n}) + d(x_{2n}, T_0 z)$$

$$\leqslant d(z, p_{2n}) + d(T_0 z, T_n x_{2n-1})$$

$$\leqslant d(z, x_{2n}) + q \frac{\max \{[d(z, x_{2n-1})]^2, [d(z, T_0 z)]^2, [d(x_{2n-1}, T_n x_{2n})]^2, 1/2[d(z, T_n x_{2n-1})]^2, 1/2[d(x_{2n-1}, T_0 z)]^2\}}{[d(z, T_0 z) + d(x_{2n-1}, T_n x_{2n-1})]}$$

$$\leqslant d(z, x_{2n}) + q \frac{\max \{[d(z, x_{2n-1})]^2, [d(z, T_0 z)]^2, [d(x_{2n-1}, x_{2n})]^2, 1/2[d(z, x_{2n})]^2, 1/2]d(x_{2n-1}, T_0 z)]^2\}}{[d(z, T_0 z) + d(x_{2n-1}, x_{2n})]}$$

प्राप्त होगा। अब $n \to \infty$ तथा (v) से हमें विरोध अर्थात् $d(z, T_0 z) = 0$, प्राप्त होता है जिसका अर्थ है $T_0 z = z$.

अब हम विचार करेंगे कि $z \neq T_n z$, तब

$$d(z, T_n z) = d(T_0 z, T_n z)$$

$$\leqslant q \frac{\max \{(dz, z)]^2, [d(z, T_0 z)]^2, [d(z, T_n z)]^2, 1/2 [d(z, T_n z)]^2, 1/2[d(z, T_0 z)]^2\}}{[d(z, T_0 z) + d(z, T_n z)]}$$

$$\leqslant q \frac{\max \{[d(z, T_n z)]^2, 1/2 [d(z, T_n z)]^2\}}{d(z, T_n z)}$$

$$\leqslant q \max [d(z, T_n z)],$$

विरोध है। अतः इससे यह निकलता है कि $z = T_n z$. अब z की अद्वितीयता सिद्ध करने के लिए कल्पना करें कि ऐसा अतिरिक्त विरोध कि $d((x, T_0 x) + d(y, T_n y) = 0$ का अर्थ है $d(T_0 x, T_n y) = 0$ तथा मान लें कि T_n का X में अन्य स्थिर बिन्दु $w (w \neq z)$ है।

$$d(z, T_0 z) + d(z, T_n w) = 0 \text{ का अर्थ होगा } d(T_0 z, T_n w) = 0$$

अतएव $$d(z, w) = d(T_0 z, T_n w) = 0$$

जिसका अर्थ है कि $z=w$. अतः इससे यह निकला कि z अद्वितीय स्थिर बिन्दु है T_n का ।

टिप्पणी :

यदि हम $T_n=T$ तथा $T_0=S$ रखें तो हमें पचपट्टे का परिणाम प्राप्त होगा ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखिका गणित विभाग के अध्यक्ष प्रो० पी० एल० शर्मा के प्रति कृतज्ञता व्यक्त करती है जिन्होंने यह शीर्षक सुझाया और इस प्रपत्र के लिखने में मार्गदर्शन किया ।

निर्देश

1. पचपट्टे, बी० जी०, Indian J. Pure appl. Math., 1979, **10**, 1362-1368.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No.1, 1990

पूर्ण दूरीक समष्टि में बहुमान वाले संकुचन प्रतिचित्रण

के० कुरेशी तथा आर० के० पाण्डेय
गणित विभाग, शासकीय पोस्टग्रैजुएट कालेज, नरसिंहपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 3, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में पूर्ण दूरीक समष्टि में बहुमान वाले प्रतिचित्रण के लिए स्थिर प्रमेय सिद्ध किया गया है

Abstract

Multivalued contraction mappings in complete matric spaces. *By* K. Qureshi and R. K. Pande, Department of Mathematics, Government Post Graduate College, Narsinghpur, (M. P.).

In this paper we shall prove a fixed point theorem for multivalued contraction mappings in complete metric space.

माना कि (X, d) दूरीक समष्टि है। किसी X के किसी अरिक्त सबसेट AB के लिए हम परिभाषित करते हैं

$$D(A, B)=\inf\{d(a, b) \mid a\in A, b\in B\},$$

$$\delta(A, B)=\sup\{d(a, b) \mid u\in A, b\in B\},$$

$$H(A, B)=\max\{\sup\{D(a, B) \mid a\in A\}, \sup\{D(A, b) \mid b\in B\}\}.$$

माना $BN(X)$ X के समस्त अरिक्त बद्ध सबसेट का सेट है। समष्टि $BN(X)$ ऊपर परिभाषित दूरी H के प्रति दूरीक समष्टि है (देखें कुरैटोव्सकी [**2**], पृष्ठ 214)

ईसेकी[1] ने राइख[3] के परिणाम का सार्वीकरण निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करते हुए किया है।

प्रमेय 1. माना (X, d) कि पूर्ण दूरीक समष्टि है । यदि $f: X \to BN(X)$ एक बहुमूल्य वाला फलन हो जिससे X में प्रत्येक x, y के लिए

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant \alpha[H(x, f(x)) + H(y, f(y))]$$

$$+\beta[H(x, f(y)) + H(y, f(x))] + \gamma d(x; y),$$

की तुष्टि होती हो जहाँ α, β, γ अनृण हैं तथा $2\alpha + 4\beta + \gamma < 1$, तो f का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है, अर्थात् किसी x' के लिए $(x') = \{x'\}$.

प्रस्तुत प्रपत्र में पूर्ण दूरीक समष्टि में हम बहुमान वाले प्रतिचित्रण के लिए स्थिर बिन्दु प्रमेय सिद्ध करेंगे । इस तरह प्राप्त प्रमेय राइख[3] तथा ईसेकी[1] सार्वीकरण होता है ।

प्रमेय 2. माना (X, d) पूर्ण दूरीक समष्टि है । यदि $f: X \to BN(X)$ एक वहुचरीय फलन हो जिससे X में प्रत्येक x, y के लिए $x \neq y$ होने पर

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant \alpha[H(x, f(x)) + H(y, f(y))]$$

$$+\beta[H(x, f(y)) + H(y, f(x))] + \gamma d(x, y)$$

$$+\eta\left[\frac{(H(x, f(y))d(x, y))}{(d(x, y) + d(y, f(y)))}\right]$$

की तुष्टि होती है जहाँ α, β, γ तथा η अनृण है तथा

$$2\alpha + 4\beta + \gamma - \eta < 1,$$

तब f का एक अद्वितीय स्थिरं बिन्दु होता है अर्थात् कुछ x' के लिए $f(x') = \{x'\}$

उपपत्ति : यदि $\alpha = \beta = \gamma = \eta = 0$, तो परिणाम नगण्य होता है । हम कल्पना करते हैं कि $0 < 2\alpha + 4\beta + \gamma + \eta$ । अब $p = (2\alpha + 4\beta + \gamma + \eta)^{1/2}$. लें तो $p < 1$. अतः एकाकी मान वाला फल $g: X \to X$ होता है कि $g(x)$ एक बिन्दु y है $f(x)$ में जो निम्नलिखित की तुष्टि करता है

$$d(x, y) = d(x, g(x)) \geqslant pH(x, f(x))$$

g जैसे फलन के लिए

$$d(g(x), g(y)) \leqslant \delta(f(x), f(y))$$

$$\leqslant \alpha[H(x, f(x)) + H(y, f(y))$$

$$+\beta[H(x) f(y)) + H(y, f(x))] + \gamma d(x, y)]$$

$$+\eta\left[\frac{(H(x, f(y))d(x, y))}{(d(x, y)+d(y, f(y)))}\right]$$

$$\leqslant \alpha p^{-1}[d(x, g(x))+d(y, g(y))]$$

$$+\beta p^{-1}[2d(x, y)+d(x, g(x))+d(y,g(y))]+\gamma d(x, y)$$

$$+\eta p^{-1}\left[\frac{(d(x, y)+d(y,g(y)d(x,y)}{(d(x, y)+d(y, g(y))}\right]$$

$$\leqslant(\alpha+\beta)p^{-1}[d(x, g(x))+d(y, g(y))]$$

$$+(2\beta p^{-1}+\eta p^{-1}+\gamma)d(x, y).$$

अतएव

$$d(g(x), g(y))\leqslant(\alpha+\beta)p^{-1}[d(x, g(x))+d(y, g(y))]$$

$$+(2\beta p^{-1}+\eta p^{-1}+\gamma)d(x, y).$$

यह कल्पना कि $2\alpha+4\beta+\beta+\gamma+\eta<1$ बतलाती है कि $2(\alpha+\beta)p^{-1}+2\beta p^{-1}+\eta p^{-1}+\gamma<1$ । विख्यात प्रमेय के अनुसार g का स्थिर बिन्दु x' है अर्थात् $g(x')=x'$.

बिन्दु x' के लिए

$$o=d(x', g(x'))\geqslant pH(x', f(x')).$$

अतएव

$$x'\in f(x').$$

यदि $z\in f(z)$, तथा $H(z, f(z))>0$,

तो

$$\delta(f(y), f(y))\leqslant 2(\alpha+\beta)H(y, f(y))<H(y, f(y)),$$

जो असम्भव है। अतः

$$f(z)=\{z\}.$$

$z=x'$ दिखाने के लिए, निम्नलिखित पर विचार करें

$$\delta(f(z), f(x'))\leqslant\beta[H(z, f(x'))+H(x', f(z))]$$

$$+\gamma d(z, x')+\eta H(z, f(x'))$$

$$\leqslant(2\beta+\gamma+\eta)d(z, x')$$

अतः $z=x'$ प्राप्त होता है जो यह दिखलाता है कि f का अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है। इस तरह प्रमेय 2 की उपपत्ति पूरी होती है।

निर्देश

(1) ईसेकी, के०, Mathematics Seminar Notes, 1974, **2**, 45-51.

(2) कुरैटोव्स्की, के०, Topology 1 PWN, Wasazawa, 1966.

(3) राइख, एस०, Bull. Un. Mat. Ital., 1972, (**4**)5, 26-42.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

फूरियर श्रेणी की टेलर संकलनीयता

वेद प्रकाश, एस० के० वर्मा तथा ए० के० दलेला
शासकीय माडल साइंस कालेज, जबलपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—मई 8, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हालैंड, साहनी तथा जिम्बालारिया[2] द्वारा प्रदत्त प्रमेय का सार्वीकरण करना है।

Abstract

On Taylor summability of Fourier series. *By* Ved Prakash, S. K. Verma and A. K. Dalela, Government Model Science College, Jabalpur (M. P.).

The aim of the present paper is to generalize the theorem given by Holland, Sahney and Tzimbalario[2] in the present form.

Theorem : If

$$\int_0^t |\phi(u)| = 0\ (t^{\Delta}),\ \Delta \geqslant 1$$

and

$$\int_{\{(1-\nu)_{\pi/n}\}^{1/a}}^{n} \frac{|\phi(t)-\phi(t+(1-\gamma)\ \pi/n|}{t} \exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{-2(1-\gamma)^2}\right) dt = 0$$

wheren is a positive constant, then the Fourier series of f is Taylor summable to S at point x

1. माना कि $\{a_n, _k\}$ एक मैट्रिक्स है जिसे

$$\frac{(1-\gamma)^{n+1}\ \theta^n}{(1-\gamma\theta)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{k} a_{n,\ k}\ \theta^k \tag{1.1}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है क्योंकि $|\gamma\theta| < 1$, n पूर्णांक है >0.

माना यदि $f(x) \in L(0, 2\pi)$ तथा इस अन्तराल के बाहर आवर्त 2π के साथ आवर्ती हो। माना कि फलन $f(x)$ से सम्बद्ध फूरियर श्रेणी को

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (X) \tag{1.2}$$

तथा

$$\phi(t) = 1/2 \{f(x+t) + f(x-t) - 2s\} \tag{1.3}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ S एक अचर है।

2. परिभाषा

माना कि

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m$$

एक दी हुई श्रेणी है और माना कि

$$s_k = \sum_{m=0}^{k} c_m$$

इस श्रेणी को टेलर समाकलनीय कहा जाता है यदि

$$\sigma_n^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} s_k$$

सान्त सीमा S की ओर अग्रसर होता है ज्यों-ज्यों $n \to \infty$.

जहाँ

$$0 \leqslant \gamma < 1. \tag{2.1}$$

3. हाल ही में हालैंड, साहनी तथा जिम्बालारियो[2] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय A. यदि

$$\int_0^t |\phi(u)|\, du = 0(t) \quad \text{ज्यों ज्यों} \quad t \to o^+ \tag{3.1}$$

तथा

$$\int_{(1-\gamma)\pi/n}^{n} \frac{|\phi(t) - \phi(t + (1-\gamma))\, \pi/n|}{t} \exp\left(\frac{-n\,\gamma\, t^2}{2(1-\gamma)^2}\right) dt = 0 \tag{3.2}$$

जहाँ η धन अचर है तब f की फूरियर श्रेणी x विन्दु पर S तक टेलर समाकलनीय है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे :

प्रमेय : यदि

$$\int_0^t |\phi(u)|\, du = 0(t^{\Delta}),\ \Delta \geqslant 1 \tag{3.3}$$

तथा

$$\int_{\{(1-\gamma)\ \pi/n\}^{1/\Delta}}^{n} \frac{|\phi(t)-\phi(t+(1-\gamma)\ \pi/n|}{t} \exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right) dt = 0 \tag{3.4}$$

जहाँ η धन अचर है तो f की फूरियर श्रेणी बिन्दु x पर S तक टेलर समाकलनीय है ।

अब हम $\quad 1-\gamma\ e^{it} = \rho\ e^{-\theta i} \quad$ लिखेंगे ।

अपने प्रमेय की उपपत्ति के लिए हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका 1

$$\left(\frac{1-\gamma}{\rho}\right)^n \leqslant e^{-Ant^2},\ A>0,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2 \tag{3.5}$$

प्रमेयिका 2

$$\left|\left(\frac{1-\gamma}{\rho}\right)^n - \exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)\right| \leqslant Bnt^4 \tag{3.6}$$

प्रमेयिका 3 : B अचर है, $t>0$

$$\left|\theta - \frac{\gamma t}{1-\gamma}\right| \leqslant ct^3, 0 \leqslant t \leqslant \pi/2, \tag{3.7}$$

c अचर है ।

4. प्रमेय की उपपत्ति

यह सुविदित है कि

$$s_k - s = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\ \sin kt\ dt + 0(1) \tag{4.1}$$

अतः $\{s_k - s\}$ का टेंलर रूपान्तर (4.2)

$$\sigma_n^{\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,\,k}\,(s_k - s)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,\,k}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\sin kt\; dt+0(1)\right\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\; I_m\, \Sigma a_{n,\,k}\, e^{ikt}\, dt+0(1) \tag{4.2}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $I_m\, e^{ikt}=\sin kt$ (क्योंकि यह श्रेणी समान रूप से अभिसारी है) अर्थात् e^{ikt} का काल्पनिक अंश

$$=I+0(1) \quad \text{माना}$$

जहाँ

$$I=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\, I_m\left\{\frac{(1-\gamma)^{n+1}\, e^{int}}{(1-\gamma\, e^{it})^{n+1}}\right\} dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\, I_m\left\{\frac{(1-\gamma)^{n+1}\, e^{int}}{\rho^{n+1}\;\; e^{-i(n+1)\theta}}\right\} dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\phi(t)}{t}\left(\frac{1-\gamma}{\rho}\right)^{n+1} \sin\,\{nt+(n+1)\theta\}\; dt$$

अब हम लिखेंगे

$$q=\frac{1}{1-\gamma},\;\; a(n)=\frac{\pi}{qn},\;\; b(n)=\left(\frac{\pi}{qn}\right)\frac{\alpha}{\Delta}$$

जहाँ

$$\frac{1}{3}<\frac{\alpha}{\Delta}<\frac{1}{2}.$$

अतः

$$I=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{a(n)}+\int_{a(n)}^{b(n)}+\int_{b(n)}^{\pi}\right]\frac{\phi(t)}{t}\left(\frac{1-\gamma}{\rho}\right)^{n+1}$$

$$.\;\sin\,\{nt+(n+1)\theta\}\; dt$$

$$I=I_1+I_2+I_3 \quad \text{माना} \tag{4.3}$$

आइये I_1 पर विचार करें क्योंकि $(1-\gamma)\leqslant\rho$, प्रमेयिका 3 के प्रयोग से

$$|I_1|\leqslant 0(1)\int_0^{a(n)} \frac{\phi(t)}{t}\,\{nt+(n+1)\,\theta\}\; dt$$

$$=0(1)\int_0^{a(n)} \frac{\phi(t)}{t}\left\{nt+(n+1)\left(\left(ct^3+\frac{\gamma t}{1-\gamma}\right)\right\}\right. dt$$

$$=0(1)\int_0^{a(n)} \frac{\phi(t)}{t}\left[\left(n+\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)t+(n+1)\; ct^3\right] dt$$

$$=0(n)\left[\int_0^{a(n)} \frac{\phi(t)}{t}\ dt+\int_0^{a(n)} \phi(t)\ t^2\ dt\right]\ (3.3) \text{ के प्रयोग से}$$

$$=0(1). \tag{4.4}$$

I_3 पर प्रमेयिका 1 का उपयोग करते हुए विचार करें। तब टिश्मार्श[1] के द्वितीय माध्यमान प्रमेय के उपयोग से

$$I_3 \leqslant 0(n^{\alpha/\Delta}) \exp\left(-A(u+1)\ \left(\frac{\pi}{qn}\right)^{2\alpha/\Delta}\right) \int_{b(n)}^{\pi} |\phi(t)|\ dt$$

$$=0(1). \tag{4.5}$$

अब I_2 पर विचार करें

$$I_2=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\phi(t)}{t}\left(\frac{1-\gamma}{\rho}\right)^{n+1} \sin\{nt+(n+1)\ \theta\}\ dt$$

प्रमेयिका 2 के सम्प्रयोग से

$$I_2 \leqslant \frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\phi(t)}{t}\left\{B(n+1)\ t^4+\exp\left(\frac{-(n+1)\ \gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)\right\}$$

$$.\ \sin\{nt+(n+1)\ \theta\}\ dt \tag{4.6}$$

$$=I_{2\cdot1}+I_{2\cdot2}, \quad \text{माना}$$

जहाँ

$$I_{2\cdot1}=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \phi(t)\ B(n+1)\ t^3 \sin\{nt+(n+1)\ \theta\}\ dt$$

$$=0(n)\ 0\left(\left(\frac{1}{qn}\right)\frac{3\alpha}{\Delta}\right)\int_{a(n)}^{b(n)} |\phi(t)|\ dt$$

$$=0(1). \tag{4.7}$$

तथा

$$I_{2\cdot2}=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{\phi(t)}{t} \exp\left(\frac{-(n+1\gamma t^2)}{2(1-\gamma)^2}\right) \sin\{nt+(n+1)\ \theta\}\ dt \tag{4.8}$$

अब

$$\sin\{nt+(n+1)\ \theta\}=\sin(n+1)\ (t+\theta)\ \cos t-\cos(n+1)\ .\ (t+\theta)\ \sin t$$

$$=\sin\ (n+1)\ (t+\theta)+0(t^2)+0(t)$$

लें जिससे कि

$$\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)} \frac{|\phi(t)|}{t} 0(t)\ dt=0(1)$$

जब हम (4.8) में nt के स्थान पर $(n+1)t$ लिखते हैं। इसी तरह हम

$$\exp\left[\frac{-(n+1)\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right]$$

में हर $(n+1)$ के स्थान n लिख सकते हैं। यदि

$$I_{2\cdot2,\,1}=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)}\frac{\phi(t)}{t}\exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)\sin n(t+\theta)\,dt \tag{4.9}$$

तो

$$I_{2\cdot2}=I_{2\cdot2,\,1}+0(1)$$

चूंकि

$$\left|\sin n(t+\theta)-\sin\frac{nt}{1-\gamma}\right|\leqslant n\left|t+\theta-\frac{t}{1-\gamma}\right|$$

$$=n\left|\theta\frac{-\gamma t}{1-\gamma}\right|,\ \text{प्रमेयिका 3 से}$$

$$\leqslant nct^3,\ 0\leqslant t\leqslant\pi$$

तो

$$\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)}\frac{|\phi(t)|}{t}\exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)cnt^3\,dt$$

$$=0(n)\,0\left(\left(\frac{1}{n}\right)\frac{2a}{\triangle}\right)\int_{a(n)}^{b(n)}|\phi(t)|\,dt$$

$$=0(1)$$

फलस्वरूप

$$I_{2\cdot2,\,1}=I_{2\cdot2,\,2}+0(1)$$

जहाँ

$$I_{2\cdot2,\,2}=\frac{2}{\pi}\int_{a(n)}^{b(n)}\frac{\phi(t)}{t}\exp\left(\frac{-n\gamma t^2}{2(1-\gamma)^2}\right)\sin nt\,dt \tag{4.10}$$

अब हमें (4.11) प्राप्त होगा

$$I_{2\cdot2,\,2}=0(1). \tag{4.11}$$

इस तरह (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10) एवं (4.11) के मिलाने से प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

निर्देश

1. टिशमार्श, ई० सी०, A Theory of Functions, आक्सफोर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस, 1952

2. हालैंड, ए० एस० बी०, साहनी, एस० एन० तथा जिम्बालारियो, जे०. Boll. Un. Mat. Ital, 1975.

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर पर कुछ प्रमेय-II

एस० एन० सिंह
गणित विभाग, नेशनल यूनिवर्सिटी आफ लसोथो (अफ्रीका)

[प्राप्त-मार्च 13, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर सम्बन्धी कुछ प्रमेयों की स्थापना की है। इन प्रमेयों पर आधारित उदाहरणों की भी स्थापना की गई है।

Abstract

Some theorems on the generalized miltiple transform-II. *By* S. N. Singh, Department of Mathametics, National University of Lesotho, Lesotho, Africa.

In this paper, we have established some theorems on the generalized multiple transforms. These theorems have been used frequently to evaluate many known and unknown integrals involving the product of H-function and other special functions. Examples based upon these theorems have also been established.

1. प्रस्तावना

हम सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर को निम्नलिखित रूप में परिभाषित करते हैं—

$$\phi(t)=MT[f(x_1, x_2\ldots,x_r)]=\int_0^\infty\int_0^\infty \left\{ \sum_{j-1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma} \prod_{j-1}^{r} x_j^{\alpha_j-1}$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[t_1\, x\lambda \left\{ \sum_{j-1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix}\{(A_u, \eta_u)\}\\ \{(B_v, \xi_v)\}\end{matrix}\right]$$

$$H_{p,q}^{m,u}\left[t \prod_{j-1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j-1}^{r} (x_j/u_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix}\{(c_p, \gamma_p)\}\\ \{(d_q, \delta_q)\}\end{matrix}\right].$$

$$f(x_1, x_2 \ldots, x_r) \prod_{j=1}^{r} dx_j \tag{1.1}$$

बशर्ते कि

$$\leqslant m \leqslant q,\ o \leqslant n \leqslant p,\ o \leqslant f \leqslant v,\ o \leqslant g \leqslant u\ R(a_j),$$

$$R(\beta_j) > 0,\ (j=1, 2, \ldots, r);\ \sigma_1, \sigma_2 > 0;\ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} > 0;$$ प्रत्येक

$x_j > 0, (j=1, , \ldots, r)$; $|\arg| < \frac{1}{2} U\pi$, $U > 0$ जहाँ

$$U = \sum_{j=1}^{f} \xi_j - \sum_{j=f+1}^{v} \xi_j + \sum_{j=1}^{g} \eta_j - \sum_{j=g+1}^{u} \eta_j$$

$$-\delta < R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1} \sum_{j=1}^{r} \frac{a_j}{p_j} \right) < -\beta;\ \delta = \min R(B_j/\xi_j),\ (j=1, 2, \ldots, f)$$

$\beta = \max R\left(\frac{A_i - 1}{\eta_i}\right), (1=1, 2, \ldots, g)$ तथा $f(x_1, x_2 \ldots, x_r)$ ऐसा है कि बहुगुण रूपान्तर का अस्तित्व रहता है।

हमने (1.1) में कथित सार्वीकृत बहुगुण रूपान्तर तथा विभिन्न ज्ञात रूपान्तरों के बीच सम्बन्ध स्थापित किया है। प्रमेय को सिद्ध करते समय हमने $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ के स्थान पर $f(x_1)$ का प्रयोग किया है।

1. प्रमेय

यदि

$$\phi(t) = HT\,[\,f(x_1)] \tag{2.1.1}$$

तथा

$$g(t) = H_v[\,f(x_1)] \tag{2.1.2}$$

तब

$$\phi(t) = \prod_{j=1}^{r} \frac{a_j^{\alpha_j}}{p_j} \frac{a_1^{v+1/2}}{\sigma_1 2^v} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N \Gamma(-v-N)}{N! \Gamma(-v-N-\frac{1}{2}) \Gamma(v+N+3/2)} \lambda^{-k}.$$

$$H^{m+g,r+n+f}_{p+r+v,q+u+1}\left[t \sum_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j} \lambda^{-k'} \middle| \begin{array}{l} \left(1-\frac{a_1+v+2N+1/2}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1} \right), \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \end{array} \right.$$

$$\left(1-\frac{a_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2} \right), \ldots, \left(1-\frac{a_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r} \right), \{(c_n, \gamma_n)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u, K'\eta_u)\}, (d_{m+1}, \delta_{m+1}), \ldots$$

$$\left. \begin{array}{l} \{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_u)\}, (c_{n+1}, \gamma_{n+1}), \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ (d_q, \delta_q), (1+\sigma-K'\sigma_1 K\sigma_1-\sigma_2) \end{array} \right].$$

$$\int_0^\infty Z_1^{v+1/2+2N} g(z_1) dz_1. \tag{2.1.3}$$

बशर्ते कि

$$K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma=\frac{a_1+v+2N+1/2}{p_1}+\sum_{j=1}^{r}\frac{aj}{pj}\right).\ K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma_2+\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta j}{pj}\right);$$

$\sigma_1, \sigma_2>0; R(a_j), R(\beta_j)>0, (j=1, 2, \ldots, r)$; प्रत्येक $x_j>0$

$(j=1, 2, \ldots, r); \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j}>c; |R(v)|<\frac{1}{2};$

$$-\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\frac{a_1+v+1/2}{p_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{aj}{pj}\right)<-\beta,\ |\arg\lambda|<\tfrac{1}{2}U\pi,$$

$U>0$ जहाँ $U, \delta=\beta$ प्रसाद तथा सिंह[3] द्वारा प्रदत्त हैं तथा समाकल

$$\int_0^\infty x_1^{v+1/2+N} d(x) dz_1,\ N\geqslant 0,$$

का अस्तित्व है।

उपपत्ति :

प्रमेय के कथन से यह निगमित होता है कि

$$g(t)=\int_0^\infty (x_1 t)^{1/2} H_v(x_1 t) f(x_1) dx_1, \tag{2.1.4}$$

जहाँ

$$R(t)>0;\ |R(v)|<\tfrac{1}{2}.$$

टिश्मार्श[4] के विलोमन सूत्र द्वारा हमें

$$f(t)=\int_0^{\infty}(x_1\, t)^{1/2}\, Y_\nu(z_1\, t)g(z_1)dx_1. \tag{2.1.5}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$R(t)>0;\ |R(\nu)|<\tfrac{1}{2}$$

(2.1.1) में (2.1.5) को प्रतिस्थापित करने तथा कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन का क्रम बदलने पर

$$\phi(t)=\int_0^{\infty} x_1^{1/2}\, g(z_1)dz_1 \int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} x_1^{1/2} \prod_{j=1}^{r} x_j^{a_j-1}\ Y_\nu(x_1 z_1)$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma} H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(A_u,\ \eta_u)\}\\ \{(B_v,\ \xi_v)\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t\sum_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2}\left|\begin{matrix}\{(\sigma_p,\ \gamma_p)\}\\ \{(d_q,\ \delta_q)\}\end{matrix}\right.\right]\prod_{j=1}^{r} dx_j \tag{2.1.6}$$

(2.1.6) में

$$Y_\nu(x_1\, z_1)=H_{1,3}^{2,0}\left[\frac{x_1^2\ z_1^2}{4}\left|\begin{matrix}\left(-\frac{\nu+1}{2},1\right)\\ (\pm\frac{1}{2}\nu,\ 1),\left(-\frac{\nu+1}{2},1\right)\end{matrix}\right.\right].$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N\Gamma(-\nu-N)}{N!\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+N\right)\Gamma(-\nu-\frac{1}{2}-N)}(\tfrac{1}{2}x_1\ z_1)^{\nu+2N} \tag{2.1.7}$$

रखने पर, जहाँ $-\frac{1}{2}<R(\nu)<0$ तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर, जो कि कथित प्रति-बन्धों के अन्तर्गत वैध है, हमें निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

$$\phi(t)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N\ \Gamma(-\nu-N)}{N!\ 2^{\nu+2N}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}+N\right)\Gamma(-\nu-\frac{1}{2}-N)}.$$

$$\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} x_1^{\nu+1/2+2N}\sum_{j=1}^{r} x_j^{a_j-1}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma}$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)\right\}^{\sigma_1}\middle|\begin{matrix}\{(P_u,\eta_u)\}\\ \{(B_v,\xi_v)\}\end{matrix}\right]$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t\prod_{j=1}^{r}x_j^{\beta_j}\left\{\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}\right\}^{\sigma_2}\middle|\begin{matrix}\{(a_p,\gamma_p)\}\\ \{(d_q,\delta_q)\}\end{matrix}\right]\prod_{j=1}^{r}dx_j$$

$$\int_0^\infty x_1^{v+1/2+2N}g(z_1)dz_1$$

अन्त में, प्रसाद तथा सिंह[3] के बहुगुण समाकल का मान निकालने पर हमें प्रमेय प्राप्त हो जाती है बशर्ते कि (2.1.3) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

उदाहरण

माना कि

$$g(z_1)=z_1^{\frac{v-1}{2}}e^{z_1^2/2b}W_{v/4,\ v/4+\frac{1}{2}}\left(z_1^2/b^2\right)$$

तो एर्डेल्यी [1, (24) p. 167], के अनुसार

$$f(x_1)=\frac{\pi^{1/2}b^{v/2+1}x^{1/2}\exp\left(\frac{b^2x_1^2}{8}\right)K_{v/2}\left(\frac{b^2x_1^2}{8}\right)}{\cos\left(\frac{v}{2}\pi\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}v\right)} \tag{2.1.8}$$

जहाँ

$$|\arg b|<\tfrac{3}{4}\pi;\ -\frac{3}{2}<R(v)|<0.$$

अपरंच, एर्डेल्यी [2, (7) p. 336], के अनुसार हमें

$$\int_0^\infty z_1^{v+1/2+2N}g(z_1)dz_1=\tfrac{1}{2}b^{\frac{3v}{2}+1+2N}\Gamma(v+\tfrac{1}{2}+N)$$

$$B\left(\frac{v+1}{2}+N,\ -v-\tfrac{1}{2}+N,\right) \tag{2.1.9}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$|<\arg b|<\frac{3}{4}\pi;\ -\frac{3}{2}<R(v)<0.$$

अत: प्रमेय के द्वारा हमें

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{a_j-1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma} \exp\left(\frac{b^2 x_1^2}{8}\right) K_{v/2}\left(\frac{b^2 x_1^2}{8}\right)$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda \left[\sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \left| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right. \right]$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \left| \begin{matrix} \{(a_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right. \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{a_j} a_1^{v+1/2} b^v \cos(\tfrac{1}{2}v\pi)\, \Gamma(-v/2)}{\prod_{j=1}^{r} p_j\, \sigma_1\, \pi^{1/2}\, 2^{v+1}}$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N b^{2N} \Gamma(v+\tfrac{1}{2}+N) a_1^{2N}}{N!\, \Gamma(v-\tfrac{1}{2}-N)\, 2^{2N}\, \Gamma(v+3/2+N)} B\left(\frac{v+1}{2}+N, -v-\tfrac{1}{2}-N\right). \lambda^{-K}.$$

$$H_{p+r+v,\, q+u+1}^{m+g,\, r+n+f}\left[t \prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j} \lambda^{-K'} \left| \begin{matrix} \left(1-\frac{a_1+v+\frac{1}{2}+2N}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1}\right), \left(1-\frac{a_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2}\right) \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \{(1-A_u-K\eta_u, K'\eta_u)\}, \end{matrix} \right. \right.$$

$$\ldots\left(1-\frac{a_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r}\right), \{(c_n, \gamma_n)\}, \{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_v)\}, (d_{m+1}, \sigma_{m+1}), \ldots (d_q, \delta_q)$$

$$\left. \begin{matrix} (\sigma_{n+1}, \gamma_{n+1}) \ldots\ldots, (\sigma_p, \gamma_p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_2) \end{matrix} \right] \tag{2.1.10}$$

प्राप्त होता बशर्ते

$$|\arg b| < \frac{3}{4}\pi; -\frac{3}{2} < R(v) < R(v) < 0$$

तथा (2.1.3) में दिये गये सारे प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

प्रमेय 2.

यदि

$$\phi(t) = NT[f(x_1)], \tag{2.2.1}$$

तथा

$$g(t)=Y_v[f(y_1)], \tag{2.2.2}$$

तो

$$\phi(t)=\frac{a_1^{v+3/2}\prod_{j=1}^{r} a_j^{a_j}}{\sigma_1 \prod_{j=1}^{r} p_j}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N\; a_1^{2N}}{N!\,2^{2N}\Gamma\left(\frac{3}{2}+N\right)\Gamma\left(v+\frac{3}{2}+N\right)}\lambda^{-K}$$

$$H_{p+r+v,\; q+u+1}^{m+g,\; r+n+f}\left[t\sum_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j}\lambda^{-K'}\middle|\begin{matrix}\left(-\frac{a_1+v+\frac{3}{2}+2N}{p_1},\frac{\beta_1}{p_1}\right),\\ \{(d_m,\delta_m)\},\end{matrix}\right.$$

$$\left(1-\frac{a_2}{p_2},\frac{\beta_2}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{a_r}{p_r},\frac{\beta_r}{p_r}\right),\{(a_n,\gamma_n)\},\{(1-B_v-K\xi_v-K'\xi_v)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u,K'\eta_u)\},(_{m+1},\delta_{m+1}),\ldots,(d_q,\delta_q),$$

$$\left.\begin{matrix}(c_{n+1},\gamma_{n+1}),\ldots,(c_p,\gamma_p)\\(1+\sigma-K\sigma_1,\;K'\sigma_1-\sigma_1)\end{matrix}\right]\int_0^{\infty} x_1^{v+3/2+2N}\; g(z_1)dz_1, \tag{2.2.3}$$

बशर्ते कि

$$K=\frac{1}{\sigma_1}\left(\sigma+\frac{a_1+v+\frac{3}{2}+2N}{p_1}+\sum_{j=1}^{r}\frac{a_j}{p_j}\right)\;:K'=\frac{1}{\sigma_1}\left(a_2+\sum_{j=1}^{r}\frac{\beta_j}{p_j}\right);$$

$\sigma_1, \sigma_2 \geqslant 0$, $R(a_j)$, $R(\beta_j)>0$, $(j=1, 2;\ldots,r)$; प्रत्येक $x_j>0$,

$(j=1, 2,\ldots, r)$; $\sum_{j=1}^{r}(x_j/a_j)^{p_j}>0$; $|R(v)|<\frac{1}{2}$;

$$-\delta<R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_1}\frac{a_1+v+3/2}{p_1}+\frac{1}{\sigma_1}\sum_{j=1}^{r}\frac{a_j}{p_j}\right)<-\beta;\;|\arg\lambda|<\tfrac{1}{2}U\pi,$$

$U>0$ जहाँ U, δ, β प्रसाद तथा सिंह[3] द्वारा प्रदत्त हैं और समाकल

$$\int_0^{\infty} z_1^{v+3/2+2N}\,g(z_1)dz_1,\; N\geqslant 0$$

का अस्तित्व है ।

उपपत्ति

प्रमेय की परिभाषा से

$$g(t)=\int_0^\infty (tx_1)^{1/2}\, Y_v(tx_1)\, f(x_1)\, dx_1 \tag{2.2.4}$$

जहाँ

$$R(t)>0: |R(v)|\ \tfrac{1}{2}.$$

टिश्मार्श[7] के विलोमन सूत्र से

$$f(t)=\int_0^\infty (tz_1)^{1/2}\, H_v(tz_1)\, g(z_1)\, dz_1,$$

जहाँ

$$R(t)>0; |R(v)<\tfrac{1}{2}.$$

(2.2.1) में $f(x_1)$ के लिए (2.2.5) से मान रखने तथा कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम को बदलने पर हम (2.2.6) की प्राप्ति होती है

$$\phi(t)=\int_0^\infty z_1^{1/2} g(x_1) dz_1 \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1^{1/2} \sum_{j=1}^{r} x_j^{a_j-1}\, H_v(x_1 z_1)$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma} H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (xj/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right].$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[t \sum_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j \tag{2.2.6}$$

$H_v(x_1 z_1)$ के लिए (2.2.6) में श्रेणी प्रसार [1, p. 428] अर्थात्

$$H_v(x_1 z_1)=\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N \left(\frac{x_1 x_1}{1}\right)^{v+1+2N}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+N\right) \Gamma\left(v+\frac{3}{2}+N\right)} \tag{2.2.7}$$

का मान रखने पर तथा प्रस्तावित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलते पर

$$\phi(t)=\frac{1}{z^{v+1}} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^N}{2^{2N}\Gamma\left(\frac{3}{2}+N\right) \Gamma\left(v+\frac{3}{2}+N\right)} \int_0^\infty z_1^{v+3/2+2N}$$

$$g(x_1)dx_1 \int_0^{x} \cdots \int_0^{\infty} x_1^{v+3/2+2N} \prod_{j=1}^{r} x_j^{a_j-1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma} .$$

$$H_{u,v}^{f,g} \left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right] .$$

$$H_{p,q}^{m,n} \left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \prod_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j$$

उपर्युक्त व्यंजक में प्रसाद तथा सिंह[3] के द्वारा बहुगुण समाकल का मान निकालने पर हमें प्रमेय प्राप्त होता है बशर्ते कि (2.2.3) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं ।

उदाहरण

माना कि

$$g(z_1) = z_1^{2\lambda_2} e^{1/2 z_1} W_{k'\lambda_1} (z_1) \tag{2.2.8}$$

तो एर्डेल्यी [1, (24) p. 167] के अनुसार

$$f(x_1) = \frac{1}{2\lambda_1 \Gamma_*(-k \pm \mu + \frac{1}{2})} g_{3,4}^{2,3} \left(\frac{1}{2} x^2 \middle| \begin{matrix} l, \pm\mu - \lambda_1 \\ l, -k - \lambda_1 - \frac{1}{2}, h{\cdot}b \end{matrix} \right) \tag{2.2.9}$$

जहाँ

$$h = \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2};\ k = -\tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2};\ l = \tfrac{1}{2}v + 3/2;\ R(v + 2\lambda_1) > 2|R(\mu)| - 7/2;$$

$$R(2k + v + 5\lambda_1) - \tfrac{1}{2};\ R(k + \lambda_1) < 0.$$

अपरंच, एर्डेल्यी [2, [7) p. 336] के अनुसार

$$\int_8^{\infty} z_1^{v+2N+5/2-1} g(z_1)\, dx_1 = \int_0^{\infty} z^{v+2N+5/2-1+2\lambda_1} e^{1/2 z_1}. W_{k\cdot\lambda_1}(z_1) dz_1$$

$$= \frac{\Gamma(\mu + v + 2_1\lambda + 2 + 2N)}{\Gamma(-k + \mu + \frac{1}{2})}. B(-\mu + v + 2\lambda_1 + 3 + 2N,$$

$$-v - 2\lambda_1 - k - 5/2 - 2N), \tag{2.2.10}$$

बशर्ते कि

$$|R(\mu)| - \tfrac{1}{2} < R(v + 2N + 2\lambda_1 + 5/2) < -R(k).$$

(2.2.1) में (2.2.9) तथा (2.2.13) को प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^{r} x_j^{\alpha_j -1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^\sigma G_{3,4}^{2,3}\left(\tfrac{1}{2}x^2 \middle| \begin{matrix} l, \pm\mu-\lambda_1 \\ l, -k-\lambda_1-1/2, h, k \end{matrix} \right)$$

$$H_{u,v}^{f,g}\left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right] H_{p,q}^{m,n}\left[t \left\{ \prod_{j=1}^{t} x_j^{\beta j} \right\} \right.$$

$$\left. \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j} \lambda_1 \Gamma(-k-\mu+1/2)\ a_1^{v+3/2}}{\prod_{j=1}^{r} p_j\ \sigma_1\ 2^v}$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1^{2N}\, \Gamma(\mu+v+2\lambda_1+2N)}{2^{2N}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}+N\right) \Gamma\left(v+\frac{3}{2}+N\right)}\ B(-\mu+v+2\lambda_1+3+2N,$$

$$\left. -v-2\lambda_1-k-\frac{5}{2}-2N\right) \lambda^{-K}.$$

$$H_{p+r+v,q+u+1}^{m+g,r+n+f}\left[t \prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta j} \lambda^{-K'} \middle| \begin{matrix} \left(1-\frac{a_1+v+\frac{3}{2}+2N}{p_1}, \frac{\beta_1}{p_1}\right), \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \{(1-A_u-K\eta_v, K'\eta_u)\}, \end{matrix} \right.$$

$$\left(1-\frac{a_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2}\right), \ldots, \left(1-\frac{a_r}{p_r}\right), \{(c_n, \gamma_n)\}, \{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_v)\},$$

$$(d_{m+1}, \delta_{m+1}), \ldots, (d_q, \delta_q),$$

$$\left. \begin{matrix} \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_1) \end{matrix} \right], \tag{.2.2.11}$$

बशर्ते कि

$$R(v+2\lambda_1) > 2|R(\mu)| = \frac{7}{2};\ R(v+2\lambda_1-2N) <= \frac{1}{2};$$

$R(k+\lambda_1)<0$ तथा प्रसाद और सिंह[3] के प्रमेय 2 में दिये गये अन्य सारे प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

प्रमेय 3

यदि

$$\psi(\omega)=L[\phi(t)], \tag{2.3.1}$$

$$\phi(t)=HT[f(x_1)]; \tag{2.3.2}$$

तथा

$$f(x_1)=H_v[g(z_1)]; \tag{2.3.3}$$

तो

$$\psi(\omega)=\frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{\alpha_j} a_1^{v+3/2}}{\prod_{j=1}^{r} p_j\omega\sigma_1 2^{v+1}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1^{2N}}{2^{2N}\,\Gamma(3/2)\,\Gamma(v+3/2+N)}\lambda^{-K}$$

$$H^{m+g,r+n+f+1}_{p+r+v,\, q+u+1}\left[1/\omega \prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j}\lambda^{-K'} \left| \begin{matrix}(0,\,1),\ \left(1-\frac{\alpha_1+v+3/2+2N}{p_1},\ \frac{\beta_1}{p_1}\right), \\ \{(d_m,\ \delta_m)\},\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left(1-\frac{\alpha_2}{p_2},\ \frac{\beta_2}{p_2}\right),\ldots,\left(1-\frac{\alpha_r}{p_r},\ \frac{\beta_r}{p_r}\right)\{(c_n,\gamma_n)\},\ \{(1-B_v-K\xi_v,\ K'\xi_v)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u,\ C'\eta)\},\ (d_{m+1},\ \delta_{m+1}),\ldots,(d_q,\ \delta_q),$$

$$\left.\begin{matrix}(c_{n+1},\gamma_{n+1}),\ldots,(c_p,\gamma_p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1,\ K'\sigma_1-\sigma_2)\end{matrix}\right]\int_0^{\infty} z_1^{v+3/2+2N}\, g(z_1)\, dz_1, \tag{2.3.4}$$

बशर्ते कि

$$R(\omega)>0;\ R\left(-v-\frac{3}{2}-2N\right)\neq 0$$

अथवा $N=0$ के लिए एक ऋण पूर्णाङ्क तथा प्रमेय 2 के लिए दिये गये वैधता के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

उपपत्ति

प्रमेय की परिभाषा से

$$\psi(\omega)=\int_0^{\infty} e^{-\omega t}\,\phi(t)\,dt \tag{2.3.5}$$

(2.3.5) में (2.2.3) से $\phi(t)$ का मान रखने पर तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर

$$\psi(\omega)=\frac{\prod_{j=1}^{r} n_j^{a_j}}{\prod_{j=1}^{r} p_j} \frac{a_1^{v+3/2}}{\sigma_1 2^{v+1}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1^{2N}}{2^{2N}\Gamma(3/2+N)\Gamma(v+3/2+N)}\lambda^{-K}.$$

$$\int_0^\infty e^{-\omega t} H^{m+g,\ r+n+f}_{p+r+v,\ q+u+1}\left[t \sum_{j=1}^{r} a_j^{\beta_j} \lambda^{-K'} \left| \begin{matrix} \left(1-\frac{a_1+v+3/2+2N}{p_1},\ \frac{\beta_1}{p_1}\right) \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \end{matrix}\right.\right.$$

$$\left(1-\frac{a_2}{p_2},\ \frac{\beta_2}{p_2}\right),\ldots,\left(1-\frac{a_r}{p_r},\ \frac{\beta_r}{p_r}\right),\ \{(c_n, \gamma_m)\},\ \{(1-B_v-K\xi_v,\ K'\xi_v)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u,\ K'\eta_u)\},\ (d_{m+1}, \delta_{m+1}),\ldots,(d_q, \delta_q),$$

$$\left.\begin{matrix} (c_{n+1}, \gamma_{n+1}),\ldots,(c_p, \gamma p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_2) \end{matrix}\right] dt \int_0^\infty z_1^{v+3/2+2N}\ g(z_1)\ dz_1 \qquad (2.3.6)$$

अन्त में निम्नलिखित ज्ञात परिणाम

$$\int_0^\infty e^{-ax} H^{m,n}_{p,q}\left[bx^\sigma \left| \begin{matrix} \{(a, a_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=1/a\ H^{m,n+1}_{p+1,q}\left[b/a^\sigma \left| \begin{matrix} (o, \sigma), \{(a_p, a_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix}\right.\right] \qquad (2.3..7)$$

से आन्तरिक समाकल का मान निकालने पर बशर्ते कि

$$\sigma>0;\ \sigma\delta+1>0;\ |\ azg\ b\ |<1/2\ \lambda'\pi,\ \lambda'>0,$$

हमें प्रमेय प्राप्त होता है बशर्ते कि उसमें दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट हो ।

उदाहरण

माना कि

$$g(z_1)=z_1^{2\lambda_1}\ e^{1/2z_1}\ w_{k,\lambda_1}(z_1) \qquad (2.3.8)$$

तो (2.2.9), (2.2.10) तथा (2.3.4) से

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty e^{-\omega t} \sum_{j=1}^{r} x_j^{a_j-1} \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j) \right\}^{\sigma} G_{3,4}^{2,3} \left(1/2\, x^2 \middle| \begin{matrix} l, \pm\mu-\lambda_1 \\ l, -k-\lambda, -1/2, h, k \end{matrix} \right)$$

$$H_{u,v}^{f,g} \left[\lambda \left\{ \sum_{j=1}^{r} (x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(A_u, \eta_u)\} \\ \{(B_v, \xi_v)\} \end{matrix} \right].$$

$$H_{p,q}^{m,n} \left[t \prod_{j=1}^{r} x_j^{\beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{r} x_j/a_j)^{p_j} \right\}^{\sigma_2} \middle| \begin{matrix} \{(c_p, \gamma_p)\} \\ \{(d_q, \delta_q)\} \end{matrix} \right] \prod_{j=1}^{r} dx_j . dt$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{r} a_j^{a_j}}{\prod_{j=1}^{r} p_j} \frac{\lambda_1 \Gamma(-k-\mu+1/2)}{\omega\, 2^{v}\sigma_1} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N a_1{}^{2N} \Gamma(\mu+v+2\lambda_1+2+2N)}{2^{2N}\Gamma(3|2+N)\, \Gamma(v+3/2+N)} \lambda^{-K}$$

$$B(\sqrt{\mu}+2\lambda_1+3+2N, -v-2\lambda_1-k-5/2-2N).$$

$$H_{p+r+v,\, q+u+1}^{m+g,\, r+n+f+1} \left[1/\omega \prod_{j=1}^{r} h_j^{\beta_j} \lambda^{-K'} \middle| \begin{matrix} (0, 1), \left(1-\dfrac{a_1+v+2N+3/2)}{p_1}, \dfrac{\beta_1}{p_1} \right) \\ \{(d_m, \delta_m)\}, \end{matrix} \right.$$

$$\left(1-\frac{a_2}{p_2}, \frac{\beta_2}{p_2} \right), \ldots, \left(1-\frac{a_r}{p_r}, \frac{\beta_r}{p_r} \right), \{a_n, \gamma_n\}, \{(1-B_v-K\xi_v, K'\xi_v)\},$$

$$\{(1-A_u-K\eta_u, K'\eta_u)\}, (d_{m+1}, \delta_{m+1}), \ldots, (d_q, \delta_q),$$

$$\left. \begin{matrix} (c_{n+1}, \gamma_{n+1}), \ldots, (c_p, \gamma_p) \\ (1+\sigma-K\sigma_1, K'\sigma_1-\sigma_2) \end{matrix} \right], \tag{2.3.9}$$

जहाँ (2.2.9), (2.2.10) तथा (2.3.4) में दिये हुए सारे प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग II Bateman Manuscript Project, McGraw Hill Book Co., New York, 1954.

2. वही : Tables of Integral transforms, भाग I, Bateman Manuscript Project, Mc-Graw Hill Book Co., New York 1954.

3. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिंह, एस० एन०, Indian J. Pure Appl. Math, 1977, **8(11)**, 1298.

4. टिश्मार्श, ई० सी०, Introduction to the Theory of Fourier Integral, द्वितीय मुद्रण, Oxford1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

Lip (α, p) वर्ग के फलन के सन्निकटन की कोटि

टीकम सिंह तथा मनोज सिंह
शासकीय इंजीनियरी कालेज, उज्जैन तथा शासकीय पालीटेकनिक, उज्जैन

[प्राप्त—जनवरी 23, 1989]

सारांश

वियुक्त रीज रूपान्तर का प्रयोग करते हुए संतत फलन के सन्निकटन पर प्रमेय को इसके फूरिये प्रसार द्वारा स्थापित किया गया है।

Abstract

A **note on the degree of approximation to function belonging to class Lip (α, p) by (R, λn, 1) transforms.** *By* Tikam Singh and Manoj Singh, Government Engineering College, Ujjain and Government Polytechnic, Ujjain.

A theorem on approximation to continuous function by its Fourier expansion is established using the discrete Riesz transform.

1. परिभाषा तथा संकेतन

माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। माना $\{\mu_n\}$ अनुक्रम है ऐसी धन संख्याओं का कि

$$\lambda_n = \mu_0 + \ldots + \mu_n \rightarrow \infty, \text{ ज्यों ज्यों } n \rightarrow \infty \tag{1.1}$$

$(R, \lambda_n, 1)$ रूपान्तरों को

$$t_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{k=0}^{n} \mu_k S_k \tag{1.2}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

यदि $\mu_n=1$, जिससे कि $\lambda_n=n+1$, तब $(R, \lambda_n, 1)$ आपरेटर[1] फेजर आपरेटरों में या $(C, 1)$ रूपान्तरों में[3] समानीत हो जाते हैं और हम $\lambda(t)=\lambda[t]$, लिखते हैं जहाँ $[t]$ सबसे बड़े पूर्णाङ्क को बतलाता है किन्तु t से बड़ा नहीं होता ।

माना कि $f \in L\ (0, 2\pi)$ और 2π-आवर्ती है तथा माना कि इसकी फूरिये श्रेणी (1.3) द्वारा दी जाती है ।

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \tag{1.3}$$

हम

$$\phi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

लिखेंगे ।

माना कि $f \in C\ (0, 2\pi)$ के सन्निकटन की कोटि, अर्थात् संतत फलन

$$E_n^*(f) = \|f(x) - T_n(f, x)\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x) - T_n(f, x)| \tag{1.4}$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ $T_n(f,x) n$ कोटि का त्रिकोणमितीय बहुपद है ।

हम कहेंगे कि $f(x) \in \text{Lip}\ (\alpha, p)$ यदि

$$\left\{ \int_0^{2\pi} | f(x+t) - f(x) |^p \, dx \right\}^{1/p} = \phi(t)^{\alpha}, \quad 0 < \underset{p \leqslant 1}{\alpha \leqslant 1} \tag{1.5}$$

2. प्रस्तावना

खान[2] ने सन्निकटन की कोटि पर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है ।

प्रमेय : यदि $f(x)$ आवर्ती फलन हो तथा $0 < \alpha < 1$ के लिए वर्ग Lip (α, p) से सम्बन्धित हो तथा यदि अनुक्रम $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ अनृण, अवर्द्धमान हों तथा $R_{(y)}/x^{\alpha}$ अवर्धमान हो तो

$$E_n^*(f) = \min \| f - t_n^{p,q} \| = 0 \frac{1}{n^{\alpha - 1/p}}$$

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य उपर्युक्त परिणाम को वियुक्त रीज रूपान्तर $(R, \lambda_n, 1$ तक विस्तीर्ण करना है । वस्तुतः हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे ।

3 प्रमेय

$f \in \text{Lip}(\alpha, p)\ 0<\alpha\leqslant 1,\ p\geqslant 1$, के लिए हमारे पास

$$\overset{*}{E}_n(t)=\max_{0\leqslant x\leqslant 2\pi}|f(x)-t_n(f,x)|=0\left\{\left(\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)^{\alpha-1/p}\right\},$$

जहाँ $t_n(f, x)$ फूरिये श्रेणी (1.3) एवं $\{\mu_n\}\downarrow$ के लिए वियुक्त रीज रूपान्तर $(R, \lambda n, 1)$ है।

प्रमेय की उत्पत्ति

यह देखा जा सकता है कि[4,5]

$$f(x)-t_n(x)=\frac{1}{2\pi\lambda n}\int_0^{\pi}\frac{\phi(t)}{\sin t/2}\sum_{k=0}^{n}\mu_k\sin(K+\tfrac{1}{2})\,t\,dt.$$

$$|f(x)-t_n(x)|\leqslant\Big|\frac{1}{2\pi\lambda n}\left[\left\{\int_0^{\alpha n}+\int_{\alpha n}^{\pi}\right]\frac{\phi(t)}{\sin t/2}\sum_{k=0}^{n}\mu_k\sin(K+\tfrac{1}{2})\,t\Big|dt.$$

$$=I_1+I_2 \text{ माना । जहाँ } a_n=\frac{\mu_n}{\lambda_n}$$

अब

$$|I_1|=\Big|\frac{1}{2\pi\lambda_n}\int_0^{\alpha_n}\frac{\phi(t)}{\sin t/2}\sum_{k=0}\mu_k\sin(K+\tfrac{1}{2})\,t\Big|dt.$$

$$=0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{\int_0^{\alpha_n}|\phi(t)|^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_0^{\alpha_n}\left|\frac{\sum_{k=0}^{n}\mu_k\sin(k+\frac{1}{2})\,t}{\sin t/2}\right|^q dt\right\}^{1/q}$$

$$=0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{\int_0^{\alpha_n}t^{\alpha p-1}\right\}^{1/p}\cdot\left\{\int_0^{\alpha_n}\left(\frac{\lambda_n.n.t}{t}\right)^q dt\right\}^{1/q}$$

$$=0\left(a_n^{\alpha-1/p}\right)(n\ a_n) \text{ क्योंकि } \lambda_n\geqslant(n+1)\,\mu_n$$

$$=0\left\{\left(\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)^{\alpha-1/p}\right\}.$$

सिंह[4] द्वारा दिये गये तर्क से हमें प्राप्त होता है—

$$|I_2| = \left| \frac{1}{2\pi\lambda_n} \int_{\alpha n}^{\pi} \frac{\phi(t)}{\sin t/2} \sum_{k=0}^{n} \mu_k \sin (K+\tfrac{1}{2}) t \right| dt$$

$$= 0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{\int_{\alpha n}^{\pi}\left(\frac{|\phi(t)|}{t^{1/p+2\alpha}}\right)^p dt\right\}^{1/p}\left\{\int_{\alpha n}^{\pi}\left|\frac{\sum_{k=0}^{n} \mu_k (\sin (K+\frac{1}{2}) t}{t^{1/q-2\overline{\alpha}}}\right|^q dt\right\}^{1/q}.$$

$$= 0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{\int_{\alpha n}^{\pi}(t^{\alpha-1/p-1/p-2\alpha})p\right\}^{1/p}\left\{\int_{\alpha n}^{\pi}\left(\frac{\lambda(1/t)}{t^{1/q-2\alpha}}\right)^q dt\right\}.$$

क्योंकि

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \mu_k \sin (K+\tfrac{1}{2}) t\right| \leqslant 0\{\lambda(1/t)\}$$

$$= 0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left\{(a_n)^{-\alpha p-1}\right\}^{1/p}\left\{\lambda\left(a_n^{-1}\right)\int_{\pi-1}^{\alpha_n-1} y^{-1-2\alpha q}\, dy\right\}^{1/q},$$

$$= 0\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)\left(a_n^{-\alpha-1/p}\right)\left(\lambda\, a_n^{-1}\right)\left(\left(a_n^{-1}\right)^{-2\alpha q}\right)^{1/q}$$

$$= 0\left\{\left(\frac{\mu_n}{\lambda_n}\right)^{\alpha-1/p}\right\}.$$

निर्देश

1. दीक्षित, जी॰ डी॰, Ind. J. Math, 1965, 7, 31-39.
2. खान, एच॰ एच॰, Ind. J. pure Appl. Maths, 1974, 5, 132-136.
3. कोरोवकिन, पी॰ पी॰, Linear operators and approximation theory, हिन्दुस्तान पब्लि॰ कार्पो॰, दिल्ली, 1960.
4. सिंह, टी॰, The Mathematics Student, 1979, 47, 222-225.
5. जिगमंड, ए॰, Trigonometric series, भाग I तथा II, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1968.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 1, 1990

रामतिल के बीज एवं बीजों के अंकुरण का अध्ययन

अर्चना पाण्डेय

शासकीय आदर्श विशान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 14, 1989]

सारांश

प्रस्तुत शोध-पत्र में रामतिल के बीज एवं उनके अंकुरण का विवरण दिया गया है। इसके बीजों का भार 2.52 मि०ग्रा० से 2.77 मि०ग्रा० तथा आयतन 0.0055 मि०ली० से 0.0085 मि०ली देखा गया। बीजों का अधिकतम अंकुरण 1 से०मी० की गहराई में होता है, जबकि दिन में एक बार पानी देने पर सबसे ज्यादा बीज अंकुरित होते हैं। विभिन्न प्रकार की मृदा में अंकुरण का क्रम अलग-अलग प्रकार का पाया गया। इसके साथ ही अंकुरण की प्रत्येक अवस्था में अंकुरण की शुरुआत तथा अंकुरण गति का भी उल्लेख किया गया है।

Abstract

Some observations on the seed and seed germination of Guizotia abyssinica. *By* Archana Pandeya, Government Model Science College, Rewa (M. P.)

The seed and the seed germination of *Guizotia abyssinica* was studied under the influence of certain ecological factors mentioned in the present paper. The seed weight and the seed volume range from 2.52 mg to 2.77 mg and 0.0055 ml to 0.0085 ml, respectively. Maximum number of seeds germinate at the depth of 1 cm, while highest germination was observed in daily watering. The germination behaviour of this species showed a great variation in different types of soil. Effort has also been made to enumerate germination initiation (days) and germination speed.

रामतिल (Niger) कम्पोजिटी कुल का सदस्य है। इसके बीजों से तेल प्राप्त किया जाता है। बीजों में 38 से 50% तक हल्के पीले रंग का, गंधहीन, खाने योग्य तेल होता है, जिसका एक विशेष स्वाद (nutty taste) होता है। इस निम्न श्रेणी के तेल का उपयोग साबुन बनाने, प्रकाश तथा चिकनाई के

सारणी 1

रामतिल (Guizotia abyssinica) के बीजों का भार तथा आयतन

बीज संख्या	बीज का भार (मि० ग्रा०)	बीज का आयतन (मि० ली०)
1	2.77	0.0085
2	2.72	0.0082
3	2.71	0.0081
4	2.75	0.0085
5	2.72	0.0082
6	2.72	0.0082
7	2.69	0.0079
8	2.70	0.0081
9	2.55	0.0056
10	2.57	0.0058
11	2.59	0.0060
12	2.70	0.0081
13	2.52	0.0055
14	2.52	0.0055
15	2.60	0.0061
16	2.59	0.0060
17	2.60	0.0061
18	2.60	0.0061
19	2.58	0.0059
कुल योग	52.84	0.1385
मध्यमान ($\bar{x}$)	2.64	0.0069
$\bar{x}\pm$S. D.	2.62±0.80	0.0069+0.0005

लिए किया जाता है। इसकी खली मवेशियों का एक अच्छा आहार है। इसके अतिरिक्त नाइजर का तेल औषधिक महत्व का भी है। तेल की मालिश से वात (rheumatism) के दर्द एवं सूजन में काफी आराम पहुँचता है[1]।

प्रयोगात्मक

रामतिल की खेती जुलाई से सितम्बर के मध्य की जाती है। इसकी फसल नवम्बर-दिसम्बर में तैयार होती है। इसके बीज दिसम्बर 1988 में एकत्रित किए गए थे। बीजों का भार रासायनिक तुला से तथा आयतन सूक्ष्म नपना गिलास (Micromeasuring Cylinder) से ज्ञात किया गया। अंकुरण प्रयोग 7 से०मी० की पेट्रीडिशेज में किए गए। प्रत्येक डिश को एक सप्ताह तक प्रतिदिन देखा गया। बीजावरण (Seed coat) से मूलांकुर (radicle) निकलने को अंकुरण माना गया। परिणाम अंकुरण शुरुआत, अंकुरण गति, अंकुरण प्रतिशत के रूप में दर्शाए गए हैं (सारिणी 2-4)।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 के आँकड़ों से स्पष्ट है कि रामतिल के बीजों का सबसे कम भार 2.52 मि०ग्रा० तथा सबसे अधिक भार 2.77 मि०ग्रा० है, तथा एक बीज का औसत भार 2.64 मि०ग्रा० पाया गया। इसी प्रकार, इसका आयतन 0.0055 मि० ली० से 0.0085 मि०ली० तथा एक बीज का औसत आयतन 0.0069 मि०लीं० नापा गया।

मृदा की विभिन्न गहराई में रामतिल के बीजों के अंकुरण का अध्ययन करने के लिए 50 बीज 0 से 5 से० मी० की गहराई में बोए गए तथा इन्हें प्रतिदिन पानी दिया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 2 में दर्शाए गए हैं। 4 से० मी० की गहराई के बाद बीजों का अंकुरण नहीं होता है। इसी प्रकार, सतह

सारणी 2

मृदा की विभिन्न गहराई में रामतिल के बीजों का अंकुरण

बीज बोने की गहराई (से०मी०)	अंकुरण शुरुआत (दिन)	अंकुरण जाति (दिन)	अंकुरण (प्रतिशत)
0	5	0	08
1	7	12	86
2	10	15	64
3	11	—	32
4	11	—	18
5	—	—	—

पर बोए गए बीज भी बहुत कम अंकुरित होते हैं। सबसे अच्छा अंकुरण 1 से०मी० की गहराई में देखा गया। सतह पर बोए गए बीजों की अंकुरण शुरुआत तीव्र होती है, जबकि 2 से०मी० गहराई में बोए गए बीज अधिकतम अंकुरण गति प्रदर्शित करते हैं।

सारणी 3 में दर्शाए गए आँकड़ों से ज्ञात होता है कि विभिन्न प्रकार की मृदा में रामतिल के बीजों का अंकुरण अलग-अलग है। सबसे अच्छा अंकुरण कार्बनिक खाद में तथा सबसे कम बालू में होता है। चूंकि बालू में जल ग्रहण क्षमता सबसे कम होती है, अतः इसमें बोए गए बीजों को उपयुक्त नमी नहीं मिलती, इसलिए इन बीजों के अंकुरण की शुरुआत भी देर से होती है। सबसे अच्छी अंकुरण-शुरुआत तीनों प्रकार की मृदा के मिश्रण में देखी गयी।

सारणी 3

विभिन्न प्रकार की मृदा में रामतिल के बीजों का अंकुरण

मृदा के प्रकार	अंकुरण शुरुआत	अंकुरण गति	अंकुरण (प्रतिशत)
बालू	5	0	40
कार्बनिक खाद	3	10	90
लोम (दोमट)	4	12	60
मिश्रण (बालू+कार्बनिक खाद+लोम)	3	11	70

रामतिल के बीजों के अंकुरण में पानी की विभिन्न स्थितियों का अध्ययन करने के लिए बीजों को पेट्रीडिसेज में बोया गया तथा इन्हें नियंत्रित पानी दिया गया। सारणी 4 से विदित होता है कि जलमग्न स्थिति (Waterlogged condition) अंकुरण पर विपरीत प्रभाव डालती है। प्रतिदिन पानी देने पर अधिकतम बीज अंकुरित होते हैं। पानी की कमी (तीसरे दिन पानी देने पर) से भी अंकुरण पर प्रतिकूल असर पड़ता है। प्रतिदिन तथा दिन में दो बार पानी देने पर शीघ्र अंकुरण आरम्भ होता है।

बीज का आकार एवं भार एक आनुवंशिकीय लक्षण है। साथ ही यह बीज के विकास के समय भोजन के लिए होने वाली आन्तरिक स्पर्धा द्वारा भी नियंत्रित रहता है[2,3]। सामान्यतया एकवर्षीय शाकीय पौधों तथा घासों के बीज हल्के एवं छोटे होते हैं। बीज के आकार का सम्बन्ध इसके वितरण से स्थापित किया जा सकता है। छोटे तथा हल्के बीजों का अच्छा वितरण (dispersal) होता है। चूंकि रामतिल के बीजों के विकिरण की कोई विशेष विधि नहीं पाई जाती, अतः हल्के तथा छोट बीज स्वयं इस समस्या का हल करते हैं। इस अध्ययन से यह स्पष्ट है कि बीजों के भार तथा आयतन में एक घनिष्ठ सम्बन्ध है। हल्के बीजों का आयतन कम तथा भारी बीजों का आयतन अधिक होता है, जैसा कि द्विवेदी[4] द्वारा बताया गया है।

सारणी 4

रामतिल के बीजों के अंकुरण में पानी की विभिन्न स्थितियों (Watering regimes) का प्रभाव

पानी की विभिन्न स्थितियाँ	अंकुरण में शुरुआत (दिन)	अंकुरण गति (दिन)	अंकुरण (प्रतिशत)
जलमग्न स्थिति	3	—	05
दिन में दो बार सिंचाई	2	6	85
दिन में एक बार सिंचाई	2	5	90
अँतरे दिन सिंचाई	3	6	75
तीसरे दिन सिंचाई	4	—	35

अंकुरण किसी पौधे के जीवन-चक्र की सबसे अहम् अवस्था होती है।[5] बीजों के अंकुरण में वृद्धि में मृदा का प्रत्यक्ष प्रभाव पड़ता है।[6] रामतिल के बीजों का सबसे अच्छा अंकुरण 1 से०मी० की गहराई पर होता है। हल्फ[7] के अनुसार हल्के तथा कम भार वाले बीजों का अंकुरण कम गहराई पर तथा बड़े तथा अधिक भार वाले बीजों का अंकुरण अधिक गहराई पर होता है। प्राप्त परिणाम इस कथन की पुष्टि करते हैं। इसी प्रकार के निरीक्षण **जोशी एवं कम्बोज**[8] तथा **दुबे एवं मल्ल**[9] द्वारा भी किए गए।

विभिन्न प्रकार की मृदा बीजों के अंकुरण, वृद्धि तथा ग्रहण क्षमता, ताप आदि को प्रभावित करती हैं। रामतिल के बीजों का अधिकतम अंकुरण कार्बनिक खाद में होता है। यह इसके भौतिक तथा रासायनिक गुण के कारण होता है।[10]

पानी का बीजों के अंकुरण पर बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है। इस अध्ययन से यह स्पष्ट है कि पानी की अधिक मात्रा में **नाइजर** के बीज अंकुरित नहीं होते (सारणी 4)। प्रति दन सिंचाई करने पर अधिकतम अंकुरण होता है। इसी प्रकार के परिणाम **दत्ता एवं सेन**[11], **सिन्हा**[12] तथा **द्विवेदी एवं पाण्डेय**[13] द्वारा दिए गए हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्राचार्य तथा विभागाध्यक्ष, शासकीय आदर्श विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०) द्वारा प्रदत्त प्रयोगशाला सुविधाओं के प्रति हम आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. वेल्थ ऑफ इण्डिया, A Dictionary of Raw Materials and Industrial products-Raw Material Series, 1948-1976, Council of Scientific and Industrial Research, New Delhi, 10 Vols.

2. सैलिसबरी, ई० जे०, The reproductive capacity of plants, 1942, G. Bell & Sons, Ltd., London.

3. पाण्डेय, एस० सी०, पुरी, जी० एस० तथा सिंह, जे० एस०, Research methods in plant ecology, 1968, Asia Publishing House, Bombay.

4. द्विवेदी, एस० एन०, Proc. 74th Ind. Sci. Cong. Part III, pp 257, 1987.

5. वेन्ट, एफ० एम०, Experimental control of plant growth, 1957, Chronica Botanica, Waltham Mass.

6. डुवेनमायर, आर० एफ०, Plant and Environment, 1959, John Wiley & Sons. New York.

7. इन्फ, एम०, Keimung and Entiwcklung des Klettenlabrautes (*Galluim aparine* L.) in Verschiedenar Aussaattiefe, 1944.

8. जोशी, एम० सी० तथा कम्बोज, ओ० पी०, J. Indian Bot. Soc., 1959, **46**, 63-75.

9. दुबे, पी० एस० तथा मल्ल, एल० पी०, Oecologia (Berlin), 1972, **10**, 105-110.

10. रस्सेल, ई० जे०, Soil Condition and Plant growth, 1961, Longmans Green & Co., London.

11. दत्ता, एस० सी० तथा सेन, सोना, Acta Botanica Academial Scientiarum Hungaricae, 1981, **27**, 319-323.

12. सिन्हा, अनुभा, GEOBIOS, 1982, **9**, 62-65.

15. पाण्डेय, अर्चना, Proc. 77th Indian Sci. Cong., 1990 (Communicated).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

सौर ऊर्जा का प्रकाश-रासायनिक रूपान्तरण

सुरेश सी० आमेटा, कु० साधना खमेसरा, मंजुबाला तथा जी० सी० दुबे
रसायन विभाग, यूनिवर्सिटी कालेज आफ साइंस, उदयपुर (राज०)

[प्राप्त—जनवरी 5, 1989]

सारांश

सौर ऊर्जा रूपान्तरण के लिए मेथिलीन ब्लू-डाइएथिलीन ट्राइऐमीनपेंटाऐसीटिक अम्ल (DTPA) प्रणाली का उपयोग फोटोगैल्वेनिक सेल में किया गया। पी-एच, रंजक की सान्द्रता, ताप, अपचायक में परिवर्तन से जो प्रभाव होता है उसका अध्ययन किया गया।

Abstract

Photochemical conversion of solar energy : Use of methylene blue-diethylenetriaminepentaacetic acid system. *By* Suresh C. Ameta, (Miss) Sadhna Khamesra, Ms Manju Bala and Gyanesh C. Dubey, Department of Chemistry, University College of Science, Sukhadia University, Udaipur (Raj.)

Methylene blue-diethylenetriaminepentaacetic acid (DTPA) system was used in photogalvanic cell for solar energy conversion. The effect of variation of pH, concentration of dye and reductant, temperature, etc. has been investigated.

सर्वप्रथम रिडियल तथा विलियम्स[1] ने फोटोगैल्वेनिक प्रभाव का प्रेक्षण किया जिसका नियमित अध्ययन रैविनोविच ने[2] बाद में किया। इस कार्य का विभिन्न प्रणालियों के लिए प्रयोग हुआ[3-8]। किन्तु साहित्य के अध्ययन से पता चला कि प्रकाश ऊर्जा के रूपान्तरण हेतु मेथिलीन ब्लू का उपयोग प्रकाश उत्तेजक[9, 10] के रूप में नहीं हुआ। फलतः प्रस्तुत शोधकार्य हाथ में लिया गया।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन में मेथिलीन ब्लू-सोडियम हाइड्राक्साइड तथा डाइमेथिलीन ट्राइऐमीन पेंटा ऐसीटिक अम्ल (DTPA) व्यवहृत किये गये। सारे विलयन दुबारा आसवित जल में तैयार किये गये।

मेथिलीन ब्लू, DTPA तथा सोडियम हाइड्राक्साइड मिश्रण को एक *H*-प्रकार के सेल में लिया गया। सेल के एक अंग में प्लैटिनम इलेक्ट्रोड को डुबो दिया गया और दूसरे में संतृप्त कैलोमोल इलेक्ट्रोड (SCE)। इसके बाद प्लैटिनम इलेक्ट्रोड को 200 W टंगस्टन लैम्प द्वारा अनुप्रभावित किया गया और दूसरा अंग जिसमें SCE था उसे अंधेरे में रखा गया। जल-फिल्टर के द्वारा उष्मीय विकिरणों को दूर रखा गया।

DTPA द्वारा मेथिलीन ब्लू के प्रकाशरासायनिक विरंजन को क्षारकीय माध्यम में पोटेंशियोमीटर द्वारा मापा गया। $MB\text{-}DTPA/OH^{-}/h\nu$ प्रणाली के विभव तथा उत्पन्न धारा को क्रमशः डिजिटल पी-एच मापी तथा मल्टीमीटर द्वारा मापा गया।

परिणाम तथा विवेचना

सेल की वैद्युत निर्गम (output) पर पी-एच परिवर्तन के प्रभाव का अध्ययन किया गया। तत्सम्बन्धी परिणाम सारणी 1 में दिये जा रहे हैं।

सारणी 1

पी-एच परिवर्तन का प्रभाव

[मेथिलीन ब्लू]$=3.20\times10^{-5}$ M [DTPA]$=2.20\times10^{-2}$ M

ताप$=303$°K तीव्रता$=10.4$ mW cm^{-2}

पी-एच	प्रकाश विभव (mV)	प्रकाश-धारा (μA)
12.5	164.0	47.0
12.7	189.0	49.0
12.9	212.0	61.0
13.1	350.0	82.0
13.2	283.0	65.0
13.4	198.0	51.0

यह देखा जाता है कि पी-एच में वृद्धि होने से प्रकाश विभव तथा प्रकाशधारा में तब तक वृद्धि होती है जब तक कि यह पी-एच 13.1 पर उच्चिष्ट को प्राप्त नहीं हो लेती। इससे आगे पी-एच वृद्धि से वैद्युत निर्गम पर विपरीत प्रभाव पड़ता है।

रंजक (MB) तथा अपचायक (DTPA) की सान्द्रता पर प्रकाशविभव तथा प्रकाशधारा की निर्भरता का भी अध्ययन किया गया (सारणी 2)।

सारणी 2

रंजक तथा अपचायक सान्द्रता का प्रभाव

पी-एच=13.1 [मेथिलीन ब्लू] × 10^5 M	ताप=303°K [DTPA] × 10^2 M	तीव्रता=10.4 mW cm^{-2} प्रकाश विभव (mV)	प्रकाश-धारा (μA)
3.2	1.5	118.0	49.0
3.2	1.7	178.0	65.0
3.2	1.9	201.0	67.0
3.2	2.2	350.0	80.0
3.2	2.4	198.0	66.0
3.2	2.6	125.0	52.0
2.7	2.2	197.0	54.0
3.1	2.2	303.00	71.0
3.2	2.2	350.0	80.0
3.5	2.2	136.0	52.0
3.6	2.2	129.0	48.0
3.8	2.2	98.0	36.0

मेथिलीन ब्लू की सान्द्रता निम्न होने पर निर्गम अल्प था क्योंकि रंजक के अणुओं की अल्प संख्या ही उत्तेजन के लिए उपलब्ध थी और प्लैटिनम इलेक्ट्रोड तक क्रमागत इलेक्ट्रान दान कम था। पुनः जब रंजक की सान्द्रता बढ़ाई गई तो प्रकाश विभव में ह्रास हुआ क्योंकि रंजक अणु तक पहुँचने वाले प्रकाश की तीव्रता घट जाती है जिससे प्रकाश का अधिकांश भाग रास्ते में रंजक अणुओं द्वारा अवशोषित हो जाता है। अपचायक की सान्द्रता परिवर्तन करने पर भी ऐसे ही परिणाम प्राप्त हुए। DTPA की सान्द्रता में कमी करने से शक्ति निर्गमन में ह्रास हुआ क्योंकि रंजक अणुओं को इलेक्ट्रान प्रदान करने वाले अपचायक अणुओं की संख्या न्यून हो जाती है। इसी तरह अपचायक की उच्च सान्द्रता रंजक अणुओं को वांछित कालावधि में इलेक्ट्रोड तक पहुंचने में बाधक बनती है।

ताप का भी प्रभाव देखा गया। तत्सम्बन्धी परिणाम सारणी 3 में अंकित हैं।

सारणी 3

ताप का प्रभाव

[MB]=3.20×10^{-5} M [DTPA]=2.20×10^{-2} M

PH=13.1 तीव्रता=10.4 mW cm^{-2}

ताप (°K)	प्रकाश विभव (mV)	प्रकाश धारा (μA)	शक्ति (μW)
298	358.0	79.1	28.3
303	350.0	80.0	28.0
308	342.0	80.7	27.6
313	333.0	81.4	27.1
318	325.0	82.4	26.8

प्रकाश-गैलवनिक सेल के ताप में वृद्धि होने पर प्रकाश धारा में वृद्धि होती है क्योंकि सेल के आन्तरिक प्रतिरोध में ह्रास आता है। फलस्वरूप प्रकाश विभव में संगत ह्रास होता है।

प्रकाशधारा में प्रकाश की तीव्रता में वृद्धि के साथ ही रैखिक वृद्धि देखी जाती है जबकि प्रकाश विभव प्रकाश तीव्रता में वृद्धि के साथ लागरैथमिक विधि से बढ़ता है।

सेल के धारा-वोल्टता अभिलक्षणों का भी अध्ययन परिपथ में बाह्य भार (log 500 K) व्यवहृत करके किया गया। यह देखा गया कि सेल का i—V वक्र अपने आदर्श आयताकार आकार से विचलित हो गया। प्रकाश-गैलवनिक सेल के पूरण गुणक (fill factor) तथा रूपान्तरण-दक्षता क्रमशः 0.26% तथा 0.1140% है।

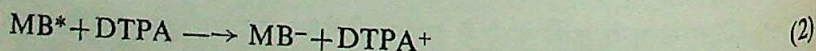
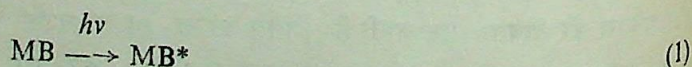
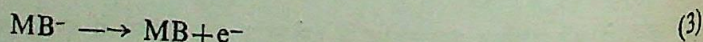
फोटोवोल्टैक सेल में प्रकाशधारा के जनन की प्रस्तावित क्रियाविधि निम्नवत् है :

प्रदीप्त प्रकोष्ठ

$$MB \xrightarrow{hv} MB^* \quad (1)$$

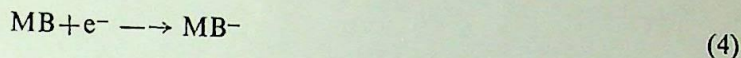
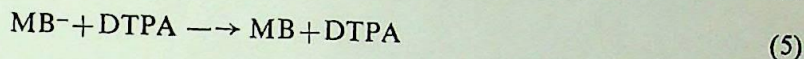
$$MB^* + DTPA \longrightarrow MB^- + DTPA^+ \quad (2)$$

इलेक्ट्रोड पर

$$MB^- \longrightarrow MB + e^- \quad (3)$$

अंधकारमय प्रकोष्ठ

इलेक्ट्रोड पर

$$MB + e^- \longrightarrow MB^- \quad (4)$$

$$MB^- + DTPA \longrightarrow MB + DTPA \quad (5)$$

जहाँ

MB=मेथिलीन ब्लू

DTPA=डाइएथिलीन ट्राइऐमीनपेंटाऐसीटिक अम्ल

निर्देश

1. रिडियल, ई० के० तथा विलियम्स, डी० सी०, J. Chem. Soc., 1925, 258.
2. रैबिनोबिच, ई०, J. Chem. Phys. 1940, **8**, 551.
3. क्लार्क, डब्लू० डी० के० तथा एकर्ट, जे० ए०, Solar Energy, 1975, **17**, 147.
4. गोमर, आर०, **इलेक्ट्रोकिम० ऐक्टा०**, 1975, **20**, 13.
5. पाटर, ए० ई० तथा थैलर, एल० एच० , Solar Energy, 1959, **3**, 1.
6. ओस्टर, जी० तथा एडेलमान, ए० एच०,J. Amer. Chem. Soc., 1956, **78**, 913.
7. किर्श-ड-मेसमीकर, ए०, लीमपौल, पी० तथा नैसील्स्की, जे०, Nouv. J. Chem. 1979, **3**, 239.
8. कानेको, एम० तथा यामाडा, ए०, J. Phys. Chem. 1977, **81**, 1213.
9. आमेटा, सुरेश सी०, दुबे, टी० डी०, दुबे, जी० सी० तथा आमेटा, आर० सी०, Z. Physik Chem. (Leipzig), 1984, 265, 838.
10. दुबे, ज्ञानेश, सी० पी-एच० डी० थीसिस, सुखाडिया यूनिवर्सिटी, उदयपुर 1985.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 1, 1990

O-N-O मोएइटी युक्त O-(एन-2-हाइड्राक्सी ऐसोटोफीनोइमीनो) एथेनॉल तथा इसके द्विसंयोजक धातु संकुलों के कीटाणुनाशी गुणों का अन्वेषण

डी० डी० ओझा, सुश्री सांत्वना गौड़ तथा आर० के० मेहता

रसायन विभाग, जोधपुर, विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 14, 1989]

सारांश

O-(एन-2-हाइड्रॉक्सी-ऐसीटोफीनोइमीनो) एथेनॉल तथा इसके द्विसंयोजक धातु कीलेटों का भौतिक-रासायनिक तकनीक द्वारा संश्लेषण एवं अध्ययन किया गया। आधुनिक अन्वेषण परिणामों के आधार पर धातु कीलेटों की त्रिविम रसायन में सार्थकता के कारण इनकी जैविक क्षेत्रों में, जैसे फफूंदी-नाशक, कीटाणु एवं जीवाणुनाशक तथा औषधियों के रूप में अत्यधिक उपादेयता सिद्ध हो चुकी है। जिन यौगिकों में आक्सीजन, गंधक तथा नाइट्रोजन दाता परमाणु होते हैं उनमें इस प्रकार के जैसे अकार्बनिक गुण[1–3] विशिष्ट रूप से विद्यमान होते हैं। कप-प्लेट विधि[4] द्वारा Cu(II), Ni(II) तथा Co(II) कीलेटों का **बेसीलस सबटिलिस** (Bacilus subtilis), **स्टेफीलोकोकस आरिअस** (Staphylococcus a ureus) तथा **बेसीलस पम्यूलस** (Basilus pumulus) जीवाणुओं के साथ जीवाणुनाशक गुणों का अध्ययन किया गया। इन धातु कीलेटों में जीवाणुनाशकता का क्रम Ni(II) > Co(II) > Cu(II) पाया गया।

Abstract

Investigation of anti-bacterial activity of O-(N-2-hydroxy-acetophenoimino) ethanol and its bivalent metal chelates possessing O-N-O-moiety. *By* D. D. Ozha, (Miss) Santwana Gaur and R. K. Mehta, Department of Chemistry, University of Jodhpur, Jodhpur.

O-(N-2-hydroxy-acetophenoimino) ethanol and its bivalent metal chelates were synthesised and studied by physico-chemical methods. Compounds containing

oxygen, nitrogen or sulphur donor atoms exhibit remarkable biocidal activities. Due to stereochemical significance, the metal chelates have been found useful as insecticides, fungicidis, algaecides, bactericides and in medicines. Using cup-plate method, the metal chelates of Co(II), Ni(II) and Cu(II) were studied with Bacilus subtilis, staphylococcus aureus and Bacilus pumulus bacteria. The antibacterial efficacy of these chelates have been found to be in the order Ni(II)>Co(II)>Cu(II).

अनेक औषधियों में विषमचक्रीय नाभिक युक्त यौगिक होने से भैषजिक विज्ञान में उनकी महत्वपूर्ण भूमिका होती है। शिफ-क्षारकों तथा क्यूमेरीनों की रसायन चिकित्सा में उपयोगिता प्रेक्षित की जा चुकी है[5-7]। धातु संकुलों की जैविक क्षेत्र में विशिष्ट उपादेयता के कारण वैज्ञानिकों का इस ओर ध्यान आकृष्ट हुआ है। इसी उद्देश्य से कुछ संक्रमण धातुओं के O-(एन-2-हाइड्राक्सी-ऐसीटोफीनोइमीनो) एथेनॉल (HAE) के साथ कीलेट संश्लेषित किये गये तथा इनके जैव-अकार्बनिक अन्वेषण कार्य को हाथ में लिया गया।

प्रयोगात्मक

O-(एन-2-हाइड्राक्सी ऐसीटोफीनोइमीनो) इथेनॉल (HAE) का संश्लेषण 2-हाइड्राक्सी ऐसीटोफीनोन तथा एथेनॉल अमीन के समआणविक मिश्रणों को पश्चवाहित करके किया गया। Co(II), Ni(II) तथा Cu(II) धातु के कीलेटों को धातु नाइट्रेट की HAE की अभिक्रिया द्वारा पूर्व प्रतिवेदित विधि[8] द्वारा ज्ञात किया गया। इन धातु कीलेटों का भौतिक-रासायनिक अन्वेषण भी मानक विधियों द्वारा किया गया। इस अन्वेषण में तीन प्रकार के जीवाणुओं—**बेसिलस सबटिलिस, स्टेफिलोकोकस ओरिअस** तथा **बेसिलस पम्यूलस** पर इनका प्रभाव देखा गया है।

डाइमेथिल फारमेमाइड विलायक में HAE तथा इसके Co(II), Ni(II) एवं Cu(II) कीलेटों को कप-प्लेट विधि[4] द्वारा जीवाणुनाशक प्रक्रिया हेतु स्क्रीन किया गया। स्ट्रेप्टोमाइसीन की विषाक्तता दर के मानक में प्रयोग किया गया।

कप-प्लेट द्वारा HAE तथा धातु कीलेटों के कीटाणुनाशी गुणों का अध्ययन

ऐगार प्लेटों को प्रारम्भिक ऐगार बीजों के पिघले माध्यम में 50° से० पर 1 मि० मी० कार्क वेधक की सहायता से छेद कर तैयार किया गया। कप के पेंदे को बन्द करने हेतु दो बूंद पिघला ऐगर डाला गया। इसके पश्चात् डाइमेथिल फारमेमाइड में एन्टीबायोटिक विलयन (1-20 μ g/ml.) पिपेट के द्वारा इस पर डाला गया।

इसे 24 घण्टे तक इनक्यूबेटर में रखा गया और अवरोध के परिक्षेत्र के प्रेक्षण लिये गये। प्लेट पर ऐगार पोषक तथा एण्टीबायोटिक (कुल सान्द्रण (20 μ g/ml.) को डाला गया तथा इस प्रकार के 5 प्रेक्षणों को रिकार्ड किया गया। सारणी 1 में प्रेक्षणों के परिणामों का विवरण दिया गया है।

सारणी 1

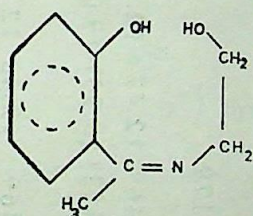
HAE तथा उसके द्विसंयोजी कीलेटों के जीवनाशी गुणों का अध्ययन

अवरोध परिक्षेत्र का व्यास (मि० मी०)

यौगिक	बी० सबटिलिस	एस० ओरिअस	बी० पम्यूलस
HAE	9.4	8.0	6.2
Co(II)-HAE	12.5	10.3	8.6
Ni(II)-HAE	14.4	12.2	10.3
Cu(II)-HAE	10.2	8.4	7.0

परिणाम तथा विवेचना

HAE में एक विषमचक्रीय व लय होता है। इसका सूत्र $C_{10}H_{13}NO_2$ है।

सूक्ष्म विश्लेषण परिणाम (तात्विक विश्लेषण एवं आणविक मात्रा) द्वारा धातु कीलेटों में 1:2 (धातु:संलग्नी) स्टाइकियोमिति (सारणी-2) दर्शायी गई है तथा इनका संघटन [MCAE(X)$_3$] है जिसमें M=द्विसंयोजक धातु आयन, (AE)-HAE का अप्रोटीय रूप है (चित्र 1)।

चित्र 1. N-(2-हाइड्राक्सीऐसीटो फीनोइमीनो) एथेनाल HAE

चुम्बकीय घूर्ण परिणाम (सारणी 2) इन कीलेटों में अयुग्मी इलेक्ट्रॉन दर्शाते हैं। इन कीलेटों में धातु-धातु अन्तर्क्रियायें नहीं होती हैं। इस प्रकार इन कीलेटों में चक्रण-विनिमय की कोई सम्भावना नहीं रहती तथा धातु कीलेट एकलक ही बने रहते हैं। इन यौगिकों के अल्पचालकता मान भी इन्हें विद्युत-अनपघट्य प्रदर्शित करते हैं।

अवरक्त स्पेक्ट्रम

HAE के अवरक्त स्पेक्ट्रम में तीन मुख्य बैण्ड 3640-3480, 1610-1625 तथा 3350-3370 cm^{-1} परास में पाये गये जो कि νOH (फीनोलिक), ν>C=N और νOH (एथेनालिक) की उपस्थिति दर्शाते हैं।

सारणी 2

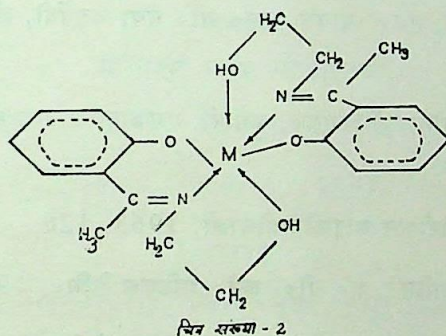
HAE के द्विसंयोजी धातु कीलेटों के रंग, लब्धि, अणुभार, तात्विक विश्लेषण, चुम्बकीय घूर्ण तथा चालकता का विवरण

			अणुभार		तात्विक विश्लेषण (%) धातु		नाइट्रोजन		कार्बन		हाइड्रोजन		μ_{eff} B. M. at	ΩM Ohm cm^2
संघटन	रंग	लब्धि	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	प्राप्त	परिगणित	308°K	$mole^{-1}$
$[C_{10}H_{13}NO_2]$	तम्बाकू	60	162	179	—	—	7.71	7.82	66.96	67.04	7.16	7.26	—	—
$[CO(L)_2X_3]$	भूरा चाकलेट	71	458	469	12.42	12.56	5.89	5.97	25.48	25.59	3.97	4.05	4.89	4.2
		(60)	(640)	(652)	(8.93)	(9.03)	(10.62)	(10.74)	(64.31)	(64.42)	(5.83)	(5.98)	(4.85)	(4.1)
$[Ni(L)_2X_3]$	जलीय हरा	62	459	469	12.48	12.52	590	5.97	25.47	25.59	3.98	4.05	2.91)	4.2
		(56)	(641)	(652)	(8.94;	(9.03)	(10.63)	(10.94)	(64.32)	(64.42)	(5.82)	(5.98)	(2.95)	(4.2)
$[Cu(L)_2X_3]$	गहरा हरा	65	464	474	13.31	13.40	5.79	5.91	25.27	25.32	3.90	4.01	1.90	6.5
	(पेल ग्रीन)	(68)	(649)	(657)	(9.53)	(9.67)	(10.54)	(10.65)	(63.80)	(63.93)	(5.82)	(5.94)	(1.92)	(6.3)

$X = H_2O$ या पिरीडीन

कोष्ठक में पिरीडीन के एडक्टस के मान दिये गये हैं।

सभी धातु कीलेटों में 3640-3480 तथा 1610-1625 cm^{-1} की परस में वैन्ड अनुपस्थित पाये गये जो फीनोलिक-OH का अप्रोटीनीकरण तथा इसका संकुलीकरण में भाग लेने को दर्शाते हैं। उच्च परास ($\sim$20 cm^{-1}) में C–O का विस्थापन फीनोलिक आक्सीजन तथा धातु में आबन्ध को तथा नीचे के क्षेत्र में विस्थापन ($\sim$25 cm^{-1}) एजोमीथाइन नाइट्रोजन का संकुलीकरण दर्शाता है। दो अन्य बैन्ड 510-540 परास में तथा 310-280 cm^{-1} जो कि νM–O तथा νM–N की उपस्थिति को दर्शाते हैं, भी पाये जाते हैं। इसी प्रकार 250-100 cm^{-1} की परास में बैंड की अनुपस्थिति धातु-धातु बन्धुता की अनुपस्थिति बताती है। सभी जलीय कीलेटों में एक बड़ा वैन्ड 3310 cm^{-1} पर पाया गया जो जल के अणु को दर्शाता है। उच्च ताप (180-290° से०) पर जल अणुओं का ह्रास इनके संकुलन को दर्शाता है न कि इनकी उपस्थिति को। अत: Co(II) तथा Ni(II) कीलेटों में अष्टफलकीय संरचना तथा Cu(II) कीलेटों में विकृत अष्टफलकीय ज्यामिति जाँनटेलर प्रभाव[0] के अनुसार पाई गई। (चित्र 2)

चित्र संख्या - 2

चित्र 2 O(N-2-हाइड्राक्सी ऐसीटोफीनोइमीनो) एथेनाल के द्विसंयोजी धातुकीलेट

संश्लेषित यौगिकों की संरचना का भैषजिक अन्वेषण से सम्बन्ध

HAE तथा इसके Co(II), Ni(II) एवं Cu(II) कीलेटों के जीवाणुनाशक गुणों का अध्ययन DMF विलायक में कप-प्लेट विधि से किया गया। HAE का तीन जीवाणुओं स्टेफिलोकोकस आरिअस, बेसिलस सबटिलिस तथा बेसीलस पम्यूलस के साथ परीक्षण दर्शाता है कि यह एक अच्छा कीटाणुनाशक है। सारणी 1 का अध्ययन दर्शाता है कि कीटाणु के अवरोध के क्षेत्र का व्यास क्रमश: बेसिलस सबटिलिस > स्टेफिलोकोकस ओरिअस > बेसिलस पम्यूलस है। विभिन्न सूक्ष्म जीवाणुओं की विभिन रसायनों के प्रति सहनशीलता भी अलग-अलग होती है। बेसिलस सबटिलिस तथा बेसिलस पम्यूलस की स्पोर बनाने की प्रवृत्ति इनको विषाक्त रसायनों को सहन करने की शक्ति प्रदान करती है। स्टेफिलोकोकस आरिअस में प्रतिरसायन बनाने की क्षमता होती है। इन सूक्ष्मजीवाणुओं की सहनशीलता का क्रम श्रीवास्तव[10] तथा उनके सहयोगियों द्वारा ज्ञात किये गये निष्कर्ष के अनुरूप पाया गया।

सारणी 1 के अध्ययन से विदित होता है कि संलग्नी HAE की तुलना में सभी धातु कीलेट अपेक्षाकृत अधिक क्रियाशील है। इन धातु कीलेटों की कीटाणुनाशक क्षमता का क्रम क्रमश: Ni(II)>Co(II)>Cu(II) पाया गया।

अतः ऐसा प्रतीत होता है कि कीलेटीकरण के कारण HAE के कीटाणुनाशक गुणों में अभिवृद्धि हुई है। कीलेटीकरण के पश्चात् सम्भवतः संलग्नी की वसा विलेयता से इनकी क्रियाशीलता बढ़ जाती है जिससे जीवाणुकोश से इसका आबन्ध बन जाता है तथा अवरोधक एंजाइम अक्रियाशील हो उठते हैं। धातु कीलेटों में Ni(II) कीलेट, Co(II) तथा Cu(II) कीलेटों से ज्यादा शक्तिशाली पाये गये।

अतः संलग्नी HAE में फीनोलिक-OH, एथेनालिक-OH तथा ऐजोमीथाइन नाइट्रोजन के कारण जो पुनः धातु परमाणु से आबन्धित हो जाता है, इस प्रकार की क्रियाशीलता बढ़ती है।

निर्देश

1. भार्मागुदर, टी० डी०, पूजर, एम० ए० तथा अलगावदी, ए० आर०, **करेन्ट साइन्स**, 1987, **56**, 17, 889.
2. मित्तल, आर०, चतुर्वेदी, एस०, गोयल, एस० सी० तथा चतुर्वेदी, जी० के०, वही, 1986, **55**, 6, 312.
3. पूजर, एम० ए०, हदीमानी, बी० एस०, कुमारी, एम० एस० तथा नीलगुन्ड, वाई० एफ०, वही, **1986, 55, 7, 353.**
4. कावानग, एफ०, **एनालीटीकल माइक्रोबायोलाजी**, 1963, 126.
5. जान, एस० ए० तथा स्पीसर, ए० बी०, **जर्न० मेडिकल केमि०**, 1975, **18**, **391.**
6. अब्दुल, ई० आई० तथा रहमान, ए० एस०, **अजनीयन फोर्सज**, 1976, **27**, 756.
7. खान, ए० एम० "माइक्रोबायोलाजी आफ मेडिकल स्टूडेन्टस" 1976, **1**, **146.**
8. मेहता, आर० के०, डागा, के०, गौड़ एस० तथा रंगा, एस० पी०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1988, **23**(1) 73
9. जान, एस० ए० तथा टेलर ई०, **प्रोसी० रायल सोसा०**, लन्दन, 1937, **161**, **220.**
10. श्रीवास्तव, टी० एन०, सेन गुप्ता, ए० के०, **इ० जर्न० कैमिस्ट्री**, 1982, **21A**, 384.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 1, 1990

हिपूरिक अम्ल के Be(II), Hg(II), V(IV) तथा Al(III) संकरों के स्थायित्व स्थिरांक

गोपेन्द्र कुमार
रसायन विभाग, ज़ाम्बिया विश्वविद्यालय, लुसाका (ज़ाम्बिया)
तथा
मनहरन नाथ श्रीवास्तव
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—नवम्बर 1, 1989]

सारांश

हिपूरिक अम्ल के Be (II), Hg (II), V (IV) तथा Al (III) संकरों के स्थायित्व स्थिरांकों का अध्ययन इरविंग तथा रसोटी की विभवमापी विधि द्वारा किया गया। अम्ल तथा लिगैंड के अनुमापन वक्रों के अध्ययन से प्रकट होता है कि प्रथम नति परिवर्तन के पश्चात् pH 10 के ऊपर दोनों वक्रों में सापेक्ष अन्तर एक तुल्यांक क्षार से अधिक की ओर अग्रसर होता जाता है, अतः एक दूसरा बफर क्षेत्र प्रस्तावित किया गया है। अम्ल के प्रोटानीकरण स्थिरांकों के मान क्रमशः $\log K_1H=11.03$ तथा $\log K_2H=3.58$ प्राप्त हुए हैं। प्रस्तुत अध्ययन से यह स्पष्ट है Be (II), Hg (II) तथा Al (III) निकायों में केवल दो संकर ML तथा ML_2 बनते हैं जबकि V(IV) निकाय में तीन संकर ML, ML_2 एवं ML_3 बनते हैं। इनके स्थायित्व स्थिरांकों के मान संशोधन पद विधि तथा उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि द्वारा परिकलित किये गये हैं। चूंकि Al(III) निकाय में दोनों पद साथ-साथ होते हैं अतः इसमें पूरी रासायनिक क्रिया के स्थायित्व स्थिरांक $(K_1.K_2)$ का मान एल्बर्ट समीकरण द्वारा परिकलित किया गया है। स्थायित्व स्थिरांकों के मान इस प्रकार हैं :

Be(II) : $\log K_1=7.95\pm0.02$; $\log K_2=7.60\pm0.01$

Hg(II) : $\log K_1=7.36\pm0.03$; $\log K_2=6.60\pm0.02$

V(IV) : $\log K_1=9.39\pm0.02$; $\log K_2=8.91\pm0.04$; $\log K_3=5.68\pm0.01$

तथा

Al(III) : $\log K_1.K_2=18.41\pm0.03$

abstract

Stability constants of Be (II), Hg (II), V(IV) aud Al (III) complexes of hippuric acid. By G. Kumar, Chemistry Department, University of Zambia, Lusaka (Zambia) and M. N. Srivastava, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

Stability constants of Be (II), Hg (II), V(IV) and Al (III) complexes of hippuric acid have been studied potentiometrically by Irving and Rossotti's method. An examination of the ligand titration curve after the inflexion reveals that above pH 10 the relative shift between the acid and ligand tends to become more than one equivalent of alkali, thus suggesting a second buffer region. It may be ascribed to amido-imidol type of tautomerism. The protonation constants for hippuric acid are rep r-ted as $\log K_1H = 11.03$ (imidol$-$OH) and $\log K_2H = 3.58(-COOH)$. It is clear from the studies that in Be (II), Hg (II) and Al (III) systems two complexes ML, and ML_2 are formed, whereas in V(IV) three complexes ML, ML_2 and ML_3 are formed. Their respective stability constants have been computed by correction term and successive approximation methods. But in Al(III) system, since the two steps occur almost simultaneously, only $K_1.K_2$ value fer the overall reaction has been computed by Albert's equation. The stability constants are :

Be (II) : $\log K_1 = 7.95 \pm 0.02$; $\log K_2 = 7.60 \pm 0.01$

Hg (II) : $\log K_1 = 7.36 \pm 0.03$; $\log K_2 = 6.60 \pm 0.02$

V (IV) : $\log K_1 = 9.39 \pm 0.02$; $\log K_2 = 8.91 \pm 0.04$

$\log K_3 = 5.68 \pm 0.91$

and

Al (III) : $\log K_1 \,.\, K_2 = 18.41 \pm 0.03$

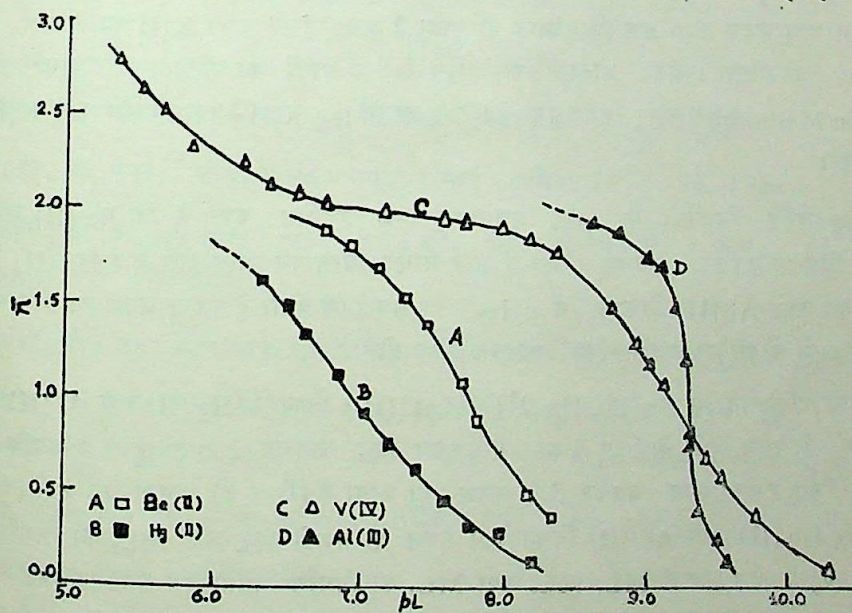
हिपूरिक अम्ल (N-बेन्ज्वाएल ग्लाइसीन) एक शक्य कीलेटकारक है और इसके कुछ संकरों का निर्माण और उनकी संरचनाओं का अध्ययन पूर्व प्रकाशनों [1-5] में किया जा चुका है। परन्तु साहित्य से प्रदर्शित होता है कि अभी तक विलयन में हिपूरिक अम्ल के धातु संकरों के निर्माण तथा उनके स्थायित्व का अध्ययन बहुत ही कम हुआ है[6-8]। प्रस्तुत शोध प्रपत्र में हिपूरिक अम्ल के Be (II), Hg(II), V (IV) तथा Al (III) के संकरों के स्थायित्व स्थिरांकों का अध्ययन इरविंग तथा रसोटी[9] की विभवमापी विधि द्वारा किया गया है।

प्रयोगात्मक

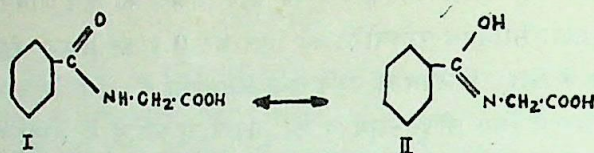
अम्ल, अम्ल तथा लिगैंड और अम्ल, लिगैंड तथा धातु आयनों के मिश्रणों का अलग-अलग अनुमापन 0.1 M NaOH विलयन के द्वारा एक दोहरे दीवार वाले अनुमापन फ्लास्क में विभवमापी

विधि द्वारा स्थिर तापमान पर किया गया है। प्रत्येक बार मिश्रण का कुल आयतन 50 ml रखा गया और उसकी आयनिक सांद्रता सोडियम परक्लोरेट को मिलाकर 0.1 M स्थिर रखी गयी। कार्बन डाइ-आक्साइड से मुक्त करने के लिए विलयन में पहले तथा अनुमापन के समय शुद्ध नाइट्रोजन को प्रवाहित किया गया। pH के मापन के लिए लीड्स-नार्थरप का pH-मापी प्रयोग में लाया गया।

परिणाम तथा विवेचना

खुगिन[10] तथा उनके सहयोगियों ने हिपूरिक अम्ल के pk का मान 20 प्रतिशत डाइआक्सेन के माध्यम में 3.98 ज्ञात किया है। जलीय विलयनों में हिपूरिक अम्ल के pH अनुमापन वक्र एक तुल्यांक क्षार पर पहला स्पष्ट नति परिवर्तन प्रदर्शित करते हैं। इस नति परिवर्तन के पश्चात् अम्ल तथा लिगैंड के वक्रों का pH 10 के बाद के क्षेत्र में अध्ययन करने से यह प्रतीत होता है कि दोनों वक्रों में सापेक्ष अन्तर एक तुल्यांक क्षार से अधिक की ओर अग्रसर होता जाता है जो यह प्रदर्शित करता है कि pH के उच्च मानों पर एक दूसरा प्रोटान भी वियोजित होता है। इसके अतिरिक्त इरविंग तथा रसोटी की विधि द्वारा प्रोटानीकरण स्थिरांक का परिकलन करने में यदि y का मान केवल एक लिया जाता है तो $\bar{n}A$ का मान pH$\sim$5 पर शून्य हो जाता है जबकि धातु लिगैंड निकाय में संकर के अनुमापन वक्रों में सामान्यतः pH 5 के ऊपर ही अधिक सार्थक विस्थापन प्राप्त होते हैं। जबकि यदि pH 5 पर $\bar{n}A$ का मान शून्य हो जाए तो धातु लिगैंड निकाय के लिए $\bar{n}$ के मान का परिकलन सम्भव नहीं होगा।

चित्र 1

अतः यह स्पष्ट है कि हिपूरिक अम्ल में उच्च pH मान पर एक दूसरा प्रोटान भी वियोजित होता है और इस दशा में $\bar{n}A$ के मान के परिकलन में $y=2$ का लिया जाना उचित है। अतः यह प्रस्तावित है कि हिपूरिक अम्ल एक अमीडो-इमीडाल चलावयवता (चित्र 2) प्रदर्शित करता है तथा pH के बढ़ते मानों के साथ इमीडाल चलावयवी की प्रधानता होती जाती है।

I ⟷ II

चित्र 2

सर्वप्रथम-COOH समूह का एक प्रोटान pH∼3.5 पर वियोजित हो जाता है और हाइड्राक्सिल समूह सम्बन्धी दूसरे प्रोटान का वियोजन उच्च pH मान पर होता है। हिपूरिक अम्ल के अवरक्त स्पेक्ट्रम में तृतीयक एल्कोहालीय समूह[11] के क्षेत्र में 1175 cm^{-1} पर एक अवशोषण बैंड प्राप्त होती है जो कि इसकी संरचना में —C—OH समूह की उपस्थिति का प्रमाण है। तृतीयक एल्कोहल में-OH विरूपण आवृत्ति के लिए 1150 cm^{-1} के समीप एक बैंड प्राप्त होता है और फीनोल में मेक और रोज़मी[12] ने 1180 cm^{-1} की बैंड को सर्वाधिक OH प्रकृति प्रदर्शित करने वाला बैंड माना है।

प्रयोगात्मक क्षेत्र (pH 3—11) में (y=2) के आधार पर A की गणना के मान 1·8-0·6 के परिसर में प्राप्त हुए हैं। इनके द्वारा K_2H का परिकलन सरलता से किया जा सकता है। परन्तु चूंकि $\bar{n}$A न्यूनतम मान केवल 0.6 तक ही प्राप्त हो पाया है अतः इनके द्वारा K_1H का यथार्थ मूल्यांकन नहीं किया जा सकता। अतः प्रोटानीकरण स्थिरांकों के मानों का परिकलन बीजगणितीय विधि (Algebraic Method)[13] द्वारा किया गया है। इस प्रकार $\log K_1H = 11.03$ और $\log K_2H = 3.58$ प्राप्त हुए हैं।

धातु-लिगैंड निकायों के pH अनुमापन वक्र प्रदर्शित करते हैं कि Be (II) और V(IV निकायों में विलयन पूर्णतया स्वच्छ रहते हैं और सार्थक विस्थापन प्राप्त होते हैं। Hg (II) निकाय के pH∼7.2 पर तथा Al(III) निकाय में pH∼5 पर अवक्षेपण होता है परन्तु अवक्षेपण प्रारम्भ होने में पूर्व इन निकायों में भी पर्याप्त सार्थक विस्थापन प्राप्त होते हैं।

$\bar{n}$ के परिकलनों से Be (II), Hg (II) और Al (III) निकायों [Hg (II) तथा Al (III) निकायों में अवक्षेपण बिन्दु से पूर्व) के लिए $\bar{n}$ का अधिकतम मान लगभग 2 प्राप्त हुआ है जबकि V(IV) निकाय के लिए इसका मान बढ़कर 3 के लगभग हो जाता है (चित्र 1)। अतः यह प्रदर्शित करता है कि Be (II), Hg (II) तथा Al (III) निकायो में केवल दो संकरों ML और ML_2 का निर्माण होता है जबकि V(IV) में तीन संकरों ML, ML_2 तथा ML_3 का निर्माण होता है। इनके क्रमबद्ध स्थायित्व स्थिरांकों का मान संशोधन पद विधि और उत्तरोत्तर सन्निकटन विधि द्वारा परिकलित किये गये हैं। परन्तु Al (III) निकाय में चूंकि दोनों पद एकसाथ होते हैं अतः पूर्ण रासायनिक क्रिया के लिए केवल $K_1.K_2$ का मान एलबर्ट समीकरण[14](Albert's equation) द्वारा ज्ञात किया जा सका है। इन धातु संकरों का स्थायित्व क्रम V (IV)≥Al (III)>Be (II) >Hg (II) प्राप्त होता है। इनमें स्थायित्व स्थिरांकसारणी 1 में दिये गये हैं।

सारणी 1

हिपूरिक अम्ल के Be (II), Hg (II), Al (III) तथा V (IV) संकरों के स्थायित्व स्थिरांक (μ=0.1M $NaClO_4$; ताप=25°C)

धातु आयन	स्थायित्व स्थिरांक			
	$\log K_1$	$\log K_2$	$\log K_3$	$\log \beta_n$
Be (II)	7.95±0.02	7.60±0.01	—	15.55±0.03
Hg (II)	7.36±0.03	5.60±0.03	—	13.96±0.05
V (IV)	9.39±0.02	8.91±0.04	5.68±0.01	23.98±0.07
				$\log (K_1.K_2)$
Al (III)	—	—	—	18.41±0.03

निर्देश

1. पीकर, पी० तथा सिगवर्ट, एस०, जर्न० प्रैक्ट० केमि०, 1941, **157**, **97.**
2. ब्राउन, जे० एन० ट्रिकोनास, एल० एम०, इन्मार्ग० केमि०, 1973, **12**, 1730.
3. मार्कोट्रिगियाना, जे० तथा बेलासेनी, जी० सी० जेड० एनार्ग० ऐल्ग० केमि०, 1975, **415**, 268.
4. कुमार, जी० तथा श्रीवास्तव, एम० एन० , नेश० एकेड० साइंस लेटर्स, 1978, 1, 134.
5. कुमार जी० तथा श्रीवास्तव, एम० एन०, रिवयू डि किमी मिनरेल, 1979, **16**, 14 ; विज्ञान परि० अनु० पत्रिका, 1979, **22**, 229 , नेश० एकेड० साइंस लेटर्स, 1981, **4**, **129.**
6. सिंह, एस० पी० तथा टंडन, जे० पी० , मोंटांश, 1975, **106**, 871.
7. सिशेव, ए० वाई० तथा टरवो, बी० एन०, ज़ुर फिज़ रिवय, 1979, **44**, **1**, 93.
8. करेज़ीनसकी, एफ० , ज़ेस्ग् नौक० मैट० फिज केमि० वाइस्ज़ा स्ज़क० पेडागाग० ग्डान्सकू० वाइड्ज़०, मैट० फिज० केमि०, 1967, **7**, 149.
9. इरविंग, एच० तथा रसोटी, एच० एस० , जर्न० केमि० सोसा० 1953, 3397 ; 1954, 2904.
10. खुर्गिन, आई० वाई० तथा विरबा, आई० वी० , इज़ो० एकैड० नौक एस० एस० एस० आर, सर० रिवम०, 1968, **6**, 1245.

11. बेलेमी, एल० जे० ; The Infrared Spectra of Complex Molecules, जॉन० एफ० विले० एण्ड सन्स, न्यूयार्क, 1962.

12. मेक, आर० तथा रोजमी, जी० , जेड० इलेक्ट्रो केमि०, 1955, **59**, 866.

13. रिचर्ड, सी० एफ०, गुस्तावसन, आर० एल० तथा मार्टेल, ए० ई० , जर्न० केमि० सोसा०, 1959, **81, 1033**.

14. एलबर्ट, ए० ; बायो केमि० जर्न, 1953 **54**, 646.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No.2, 1990

कृत्रिम जलाशय तथा भूकम्प : विश्वव्यापी स्थिति

हर्ष के० गुप्ता
कोचिन यूनिवर्सिटी आफ साइन्स एण्ड टेक्नालाजी
कोचीन-682022

सारांश

जलविद्युत शक्ति, बाढ़ नियंत्रण तथा सिंचाई कार्यों के लिए सारे विश्व में बृहद कृत्रिम जलाशय बनाये जाते हैं। सर्वप्रथम कार्डर ने भूकम्प का सम्बन्ध जलाशय भारण के साथ जोड़ा। अब तक जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता में होने वाले परिवर्तनों के लगभग 80 उदाहरण ज्ञात हैं। हमारे शोधकार्य से वे कसौटियाँ निकाली जा सकी हैं जिससे प्राकृतिक भूकम्पों तथा प्रेरित भूकम्पों में अन्तर बतलाया जा सकता है। इन कसौटियों का सम्प्रयोग अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर हो रहा है।

Abstract

Artificial water reservoirs and earthquakes : A world wide status. *By* Harsh K. Gupta, Cochin University of Science and Technology, Cochin-682022.

Huge artificial water reservoirs are created all over the world for generation of hydroelectric power, flood control and irrigation purposes. Carder (1945), for the first time pointed out the association of earthquakes with reservoir loading at Lake Mead in United States. By now some eighty examples of reservoir induced changes in seismicity (R I S) are known. The work carried out by us led to generation of criteria to differentiate natural earthquakes from induced earthquakes. These criteria are now internationally applied.

प्रायः यह प्रश्न पूछा जाता है कि हिमालय के जलाशयों के कारश भूकम्प क्यों उत्पन्न नहीं होते ? हिमालय की पाद-पहाड़ियों में प्रेरित भूकम्प न आने का कारण मूलतः क्षेप-भ्रंश परिवेश thrust fault

3 फरवरी 1990 को कोचिन में साइंस कांग्रेस अधिवेशन के अवसर पर अनुसंधान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्षीय भाषण।

environment) है जो जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता के अनुकूल नहीं है। किन्तु ये बाँध उच्च भूकम्पनीयता के क्षेत्रों में स्थित हैं जहाँ 7 या अधिक मात्रा के भूकम्प आ चुके हैं।

जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता (RIS) की विश्वव्यापी स्थिति

सर्वप्रथम कार्डर ने[1] 1945 ई० में संयुक्त राज्य अमरीका की मीड झील के लिए भूकम्पों का सम्बन्ध कृत्रिम जलाशयों के भारण (Loading) के साथ इंगित किया । 1960 के दशक के मध्य लगभग एक दर्जन ऐसी जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयताएँ ज्ञात थीं। 10 दिसम्बर 1967 को कोयना बाँध के निकट 6·3 मात्रा का भूकम्प आया तो विश्व भर के इंजीनियरों तथा भू-विज्ञानियों का ध्यान जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता की ओर आकृष्ट हुआ। 1968 में रोथे ने[2] एक लेख लिखा, "झील को भरिए, भूकम्प चालू कीजिए।" अभी तक जलाशयों से सम्बद्ध जितने भी भूकम्प आये हैं उनमें 1967 का कोयना भूकम्प अभी भी सबसे बड़ा तथा सर्वाधिक विनाशकारी भूकम्प है जिसने कोयना प्रोजेक्ट नगर को ध्वस्त कर दिया, जिसमें 200 जानें गईं; 1500 लोग घायल हुए और हजारों लोग घरबार रहित हो गये (गुहा इत्यादि[3])। तब से जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयताओं की घटनाओं की सूची काफी बढ़ चुकी है (गुप्ता तथा रस्तोगी[4]) और 1985 में[5] जब अन्तिम संकलन हो रहा था तो लगभग 70 घटनाएँ ज्ञात थीं। इधर के वर्षों में कई अन्य घटनाओं की सूचना दी गई है (यथा जापान में नगवाडो तथा मैकियो) किन्तु अधिकांश जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता की घटनाएँ लघु हैं और केवल चार भूकम्पों ने ही रिक्टर माप में 6 इकाई का अतिक्रमण किया है। ये हैं

1. चीन का जिगफेंगकियांग जलाशय, मार्च 19, 1962, M 6.1
2. जाम्बिया-जिम्बावे में करीबा झील, सितम्बर 23, 1963 M 6.1
3. ग्रीस में क्रेमस्टा झील, फरवरी 5, 1965, M 6.2
4. भारत में, कोयना बाँध, दिसम्बर 10, 1967, M 6.3

5 से 5.9 मात्रा वाले उदाहरण सात हैं। मिस्र में असवान बाँध से निर्मित नासिर झील इस श्रेणी का सबसे ताजा उदाहरण है जहाँ झील को भरने के 17 वर्ष बाद 14 नवम्बर 1981 को M $5\frac{1}{2}$ का भूकम्प आया[6]।

जिन जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयताओं में 4-4.9 मात्रा वाले भूकम्प आये उनकी संख्या चौदह है और इस सूची में भटसा का नाम जुड़ा है जो बम्बई से लगभग 100 किमी० दूर है जहाँ 15 सितम्बर 1983 को 4.5 मात्रा का भूकम्प आया। यह भूकम्प जलाशय के तीव्र भारण के पश्चात् आया जिससे एक महीने में जल का स्तर 18 मीटर उठ गया। ऐसा भय हो रहा था (पाटिल इत्यादि[7]) कि कहीं कोयना जैसा काण्ड न हो जाय। किन्तु तब से मानीटरिंग चालू है और तब से 1983 जैसा कोई भूकम्प नहीं आया।

4 से कम मात्रा वाले उदाहरणों की संख्या अधिक है। जलाशयों के अवरोध के बाद द्रव इंजेक्शन / चूषण प्रेरित भूकम्पों के उदाहरण मिलते हैं तो उसी के साथ ऐसे भी उदाहरण जहाँ सूक्ष्म-

भूकम्प सक्रियता में ह्रास देखा गया। चित्र 1 में जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता का विश्वव्यापी वितरण दिखलाया गया है।

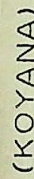
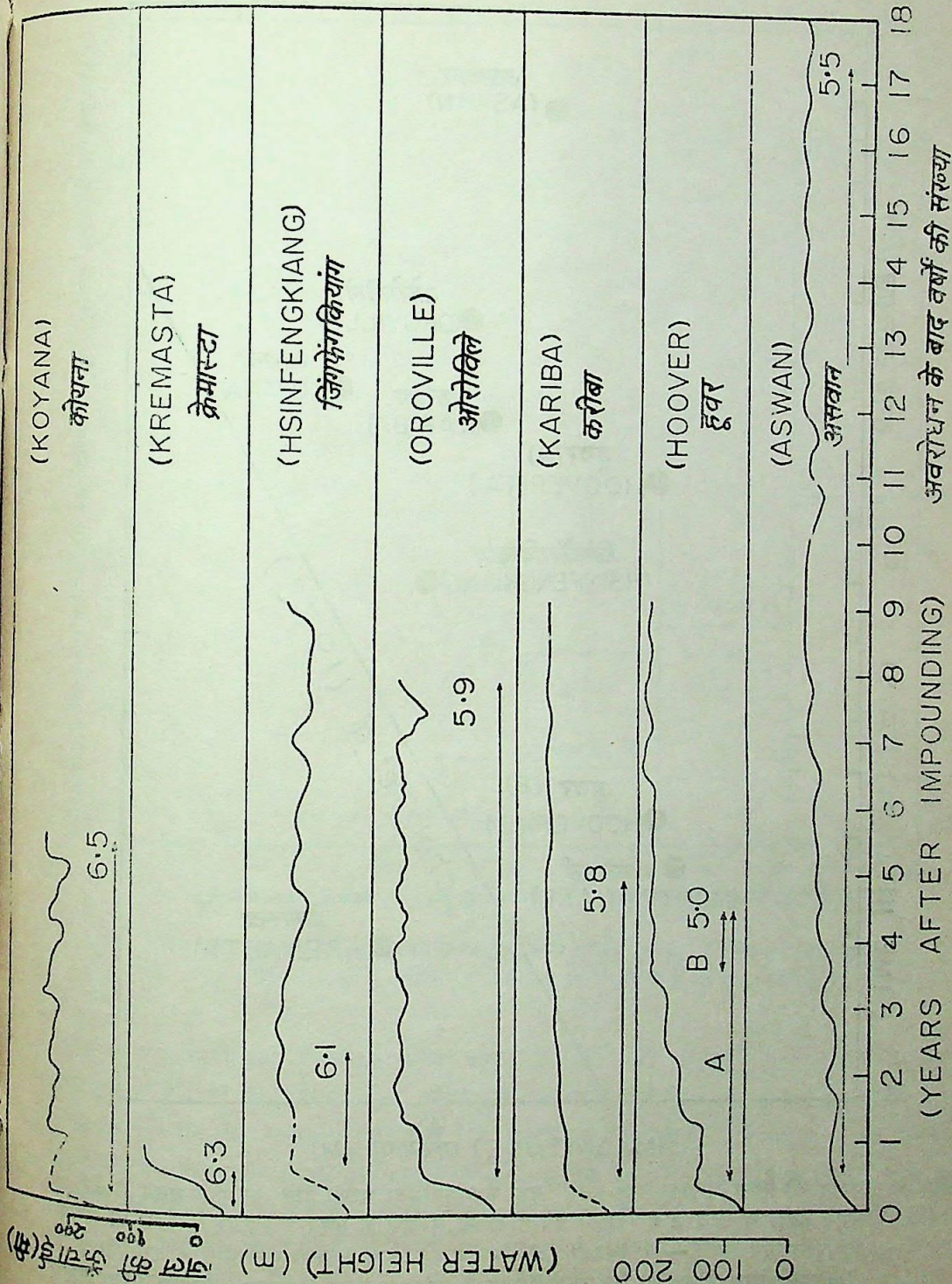
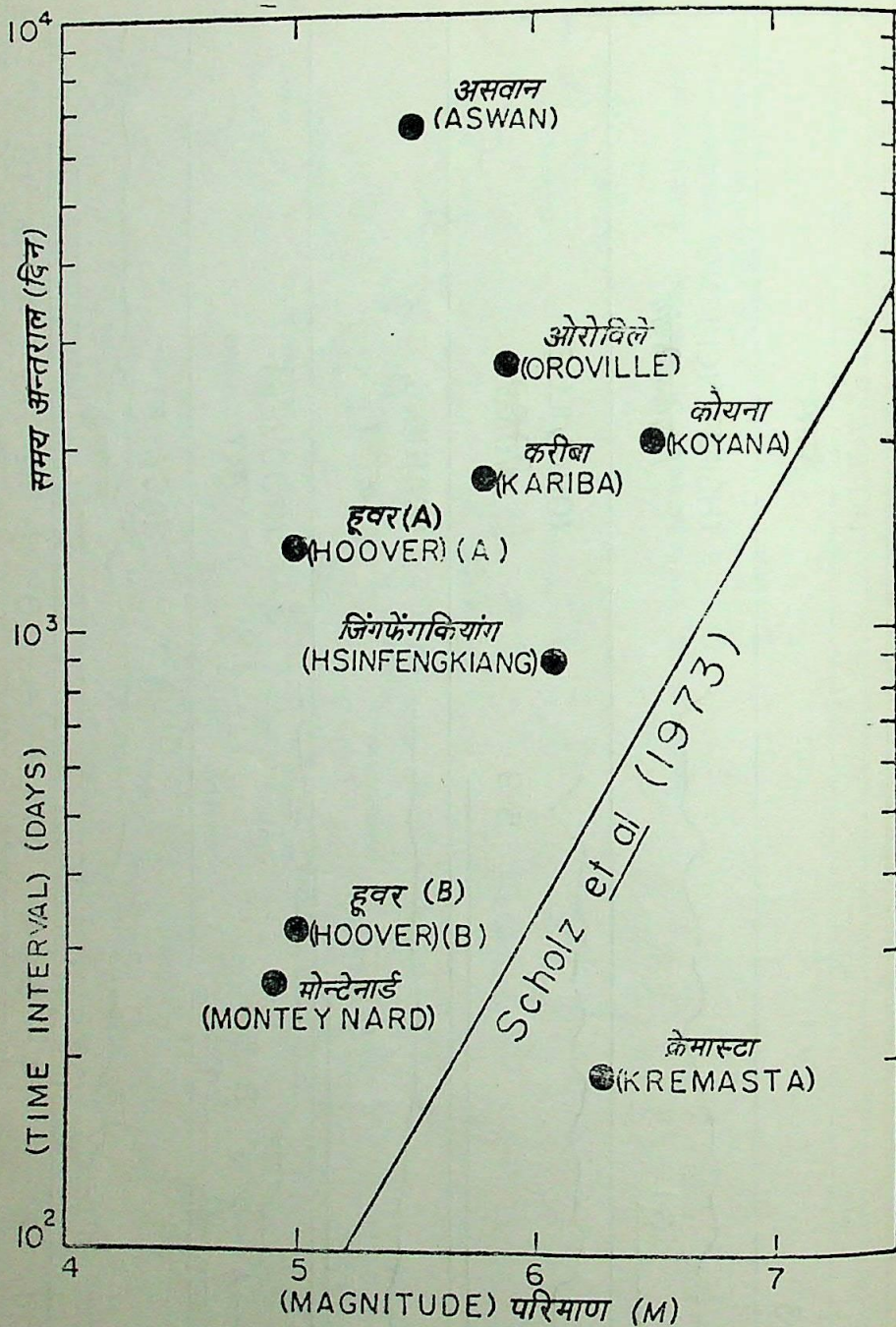
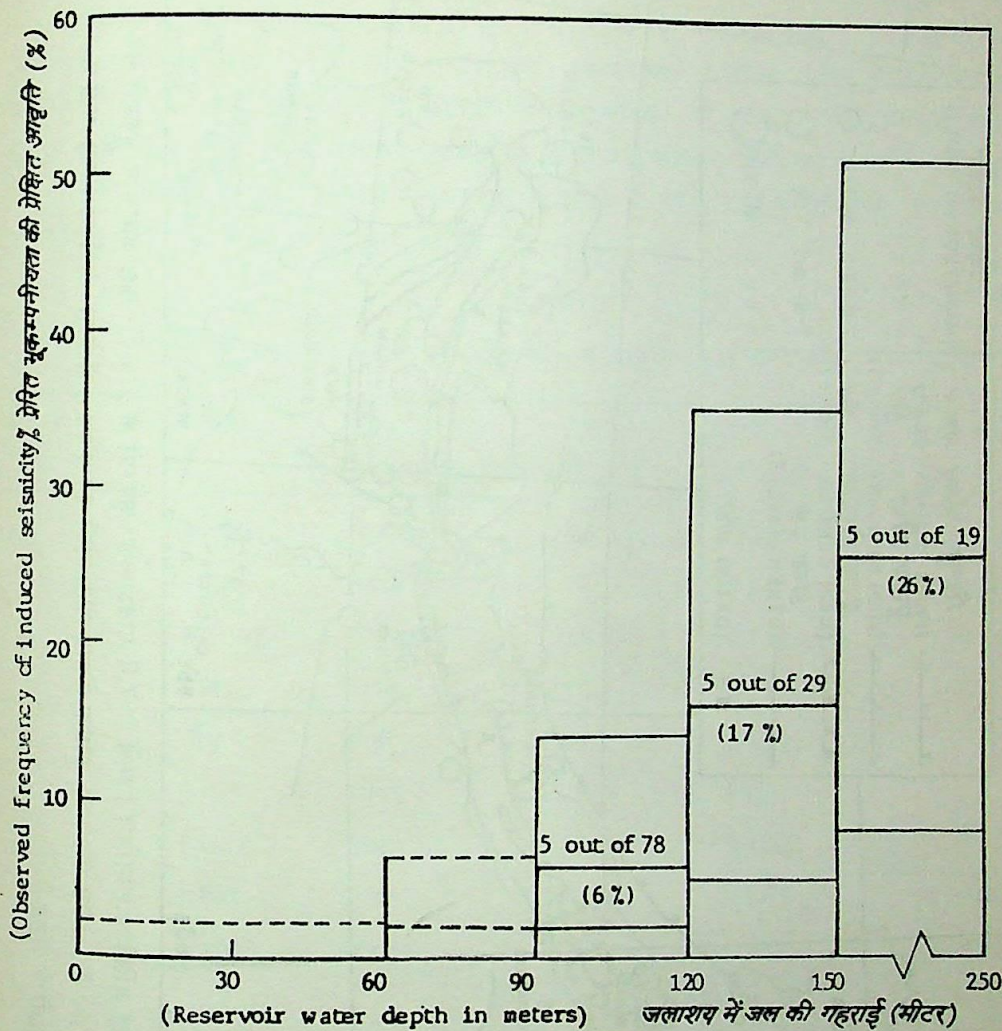
चित्र 2 को सिम्पसन के आधार पर नवीकृत किया गया है। उसमें सात अत्यन्त महत्वपूर्ण कम्पनीयताओं के लिए जलाशय तल, जलाशय के अवरोध तथा सबसे बड़ी कम्पनीयता घटना के बीच के अन्तराल तथा इसकी मात्रा को प्रदर्शित किया गया है। असवान बाँध को छोड़ कर शेष सारी भूकम्पनीयता की घटनाएँ जलाशयों के प्रारम्भिक अवरोधन के आठ वर्ष के भीतर ही घटीं। चित्र 3 में प्रथम भराव तथा भूकम्पनीयता घटना घटित होने के मध्य समय पश्चता के विरुद्ध पूर्वाभासी घटना की मात्रा तथा अवधि को भी दिखलाया गया है जिसे शोल्ट्ज इत्यादि ने[9] खोजा था। जहाँ तक जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता का प्रश्न है, भूकम्प की मात्रा तथा इसके घटित होने एवं जलाशय के अवरोधन के मध्य के अन्तराल में कोई सहसम्बन्ध प्रतीत नहीं होता।

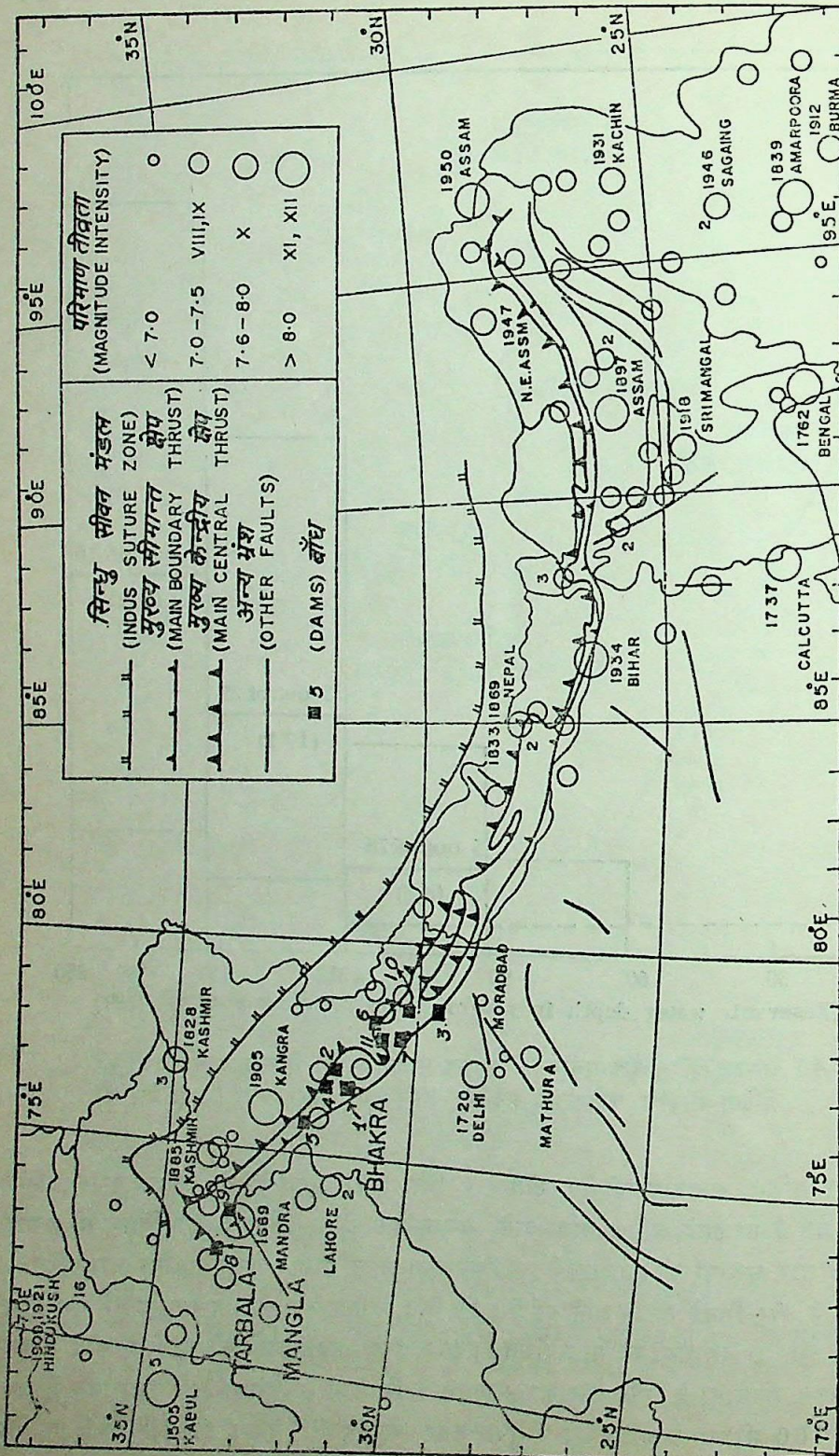
जलाशय प्रेरित-भूकम्पनीयता की सामान्य विशेषताएँ

कतिपय अग्रणी अध्ययनों द्वारा (गुप्ता इत्यादि[10,11]) जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता की सामान्य विशेषताओं तथा सामान्य भूकम्पों से विभेद कराने वाले लक्षणों की पहचान की गई है। झील के भराव के बाद झटके (कंप) प्रारम्भ हुए या उनकी आवृत्ति में पर्याप्त वृद्धि हुई और झीलों से 25 किलोमीटर की सीमा के भीतर अधिकेन्द्रों की स्थिति पाई गई। झटकों को प्रभावित करने वाले कारकों में हैं—जल स्तर में वृद्धि की दर, भारण की अवधि, अधिकतम प्राप्तव्य जल स्तर तथा वह अवधि जिसमें उच्च जल स्तर बना रहता है। जलाशय प्रेरित कम्पनीयता अनुक्रम में सबसे बड़े उत्तरघात एवं प्रमुखघात का अनुपात उच्च (~ 0.9) है और आवृत्ति-मात्रा सम्बन्धों में b मान उच्च हैं जो सम्बद्ध क्षेत्रों में सामान्य भूकम्पों के विपरीत है। पूर्वघात-उत्तरघात पैटर्न मोगी के माडल के टाइप II के संगत है जबकि इन क्षेत्रों में सामान्य भूकम्प अनुक्रम टाइप I के समान होते हैं। जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता के उत्तरघात सामान्य भूकम्पों की तुलना में अपेक्षतया दीर्घतर अवधि तक बने रहते हैं। बड़ी भूकम्पनीयता की घटनाओं के लिए सामान्य भ्रंश परिवेश में भ्रंश गति का नति सर्पण घटक ऐसा होता है कि झीलें नीचे फेंके गये खण्डों में स्थित होती हैं। कम्पनीयता के स्थल ऐसे क्षेत्रों में स्थित होते हैं जहाँ भूकम्प बीत जाने के बाद शैलों की उपस्थिति पाई जाती है यथा चूनापत्थर तथा लाल बोल जो कि जल द्वारा संक्षारित होते रहते हैं।

जलाशय में जल स्तम्भ की ऊँचाई जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता को प्रेरित करने वाला प्रमुख कारक प्रतीत होती है। 5 या इससे बड़ी मात्रा वाली अधिकांश भूकम्पनीयता की घटनाएँ उन जलाशयों के निकट घटीं जहाँ जल स्तम्भ की ऊँचाई 100 मीटर पार कर गई। चित्र 4 से इस तथ्य का स्पष्टीकरण होता है जिसे स्टुअर्ट-अलेक्जेंडर तथा मार्क के आधार पर बनाया गया है[12]।

जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता तथा हिमालय के जलाशय

भूकम्प की अल्पाइड पट्टी भारत उपमहाद्वीप के उत्तर से होकर गुजरती है। हिमालय की फ्रंटल आर्क, जिसके पश्चिम में चमन भ्रंश है तथा पूर्व में अराकानयोमा है, भूकम्पन की दृष्टि से

चित्र 1. भूकम्पनीयता में जलाशय प्रेरित परिवर्तनों का विश्वव्यापी वितरण (गुप्ता[5])

चित्र 2. सात प्रमुख जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता घटनाओं के लिए जलाशय भराव वक्र, समय अन्तराल तथा सबसे बड़ी भूकम्पनीयता घटना की मात्रा केवल आपेक्षिक ऊँचाइयां दी गई हैं। टूटी रेखाएँ प्रकाशित आंकड़ों की अनिश्चितता बताती हैं। तीरों से चित्र 3 में प्रयुक्त समय अन्तराल सूचित होता है।

चित्र 3. भराव की प्रथम अवस्था तथा सबसे बड़ी भूकम्पनीयता घटना होने के मध्य समय में देरी। समय अन्तराल चित्र 2 में दिखाये गये तीरों की लम्बाई के संगत है। हूबर के लिए दो समय अन्तराल दिये गये हैं—*A* तथा *B*। *A*=भराव की प्रथम अवस्था पूरी होने के बाद समय। *B*=पहली बार अधिकतम जल स्तर पहुँचने के बाद का समय अन्तराल। भूकम्प मात्रा तथा पूर्वाभास की अवधि भी दिखलाई गई है (शोल्ज सम्बन्ध 1973)।

चित्र 4. अवरुद्ध-प्रेरित भूकम्पनीयता (भूकम्प मात्रा ≥ 3) से सम्बद्ध जलाशयों की प्रेक्षित आवृत्ति प्रतिशतता प्रदर्शित करने वाला हिस्टोग्राम (मोटी रेखाएँ)।

विश्व का सर्वाधिक सक्रिय अन्तरामहाद्वीपीय क्षेत्र है। चित्र 5 को चन्द्रा[13] के आधार पर आधुनिक बनाया गया है। यह 7 या इससे अधिक मात्रा वाले समस्त भूकम्पों के अधिकेन्द्रों का चित्रण तो करता ही है साथ ही उन सारे भूकम्पों को बतलाता है जो हिमालयन फ्रंटल आर्क, अराकानयोमा तथा पश्चिमी अक्षसंधि में आये हैं और जिनसे तमाम जानें गई हैं। इस चित्र में हिमालय की पाद-पहाडियों में पूर्ण किये जा चुके या बनाये जा रहे जलाशयों को भी प्रदर्शित किया गया है। इंजीनियरों की बोली में कोई कृत्रिम जलाय बृहद जलाशय कहलाता है यदि जल का आयतन 1 किमी^{3} से अधिक हो या जलाशय में जल स्तम्भ की ऊँचाई 100 मीटर से अधिक हो। गुप्ता तथा राजेन्द्रन[14] ने यह इंगित किया है कि ऐसे

चित्र 5. हिमालय तथा उसके आस-पास का अधिकेन्द्र मानचित्र जिसमें $\geqslant 7.0$ मात्रा वाले भूकम्पों के साथ ही कुछ अर्वाचीन भूकम्पों को दिखलाया गया है जिनसे जानें गई हैं। 100 मीटर से अधिक ऊँचाई वाले बांधों को पूरित वर्गों द्वारा प्रदर्शित किया गया है। संख्याएँ सारणी 1 में आई संख्याओं के संगत हैं।

11 बृहद जलाशयों में से 9 को पहले ही अवरुद्ध किया जा चुका है (सारणी 1) किन्तु इन 9 स्थानों में से किसी से भी भूकम्पनीयता की घटना की सूचना प्राप्त नहीं है। हां, तारबेला जलाशय में प्रारम्भिक भराव के बाद बांध स्थान से 100 किमी० दूरी तक भूकम्पनीयता में अल्प ह्रास देखा गया (जैकोब इत्यादि[15]) गुप्ता तथा राजेन्द्रन ने[14] सीमित उपलब्ध आंकड़ों के आधार पर यह निष्कर्ष निकाला है कि सामान्यतया हिमालय के जलाशय भूकम्पों को प्रेरित नहीं करते। किन्तु यह ध्यान में रखना होगा कि इनमें से अनेक जलाशय हाल ही में अवरुद्ध किये गये हैं और रन्ध्र-दाब-विसरण का विलम्बित प्रभाव[16]; कालान्तर में ही सार्थक हो सकता है।

सारणी 1

हिमालय की नदियों पर 100 मी० से अधिक ऊँचाई वाले बांध

क्रमांक	बांध	नदी	ऊँचाई (मी०)	जलाशय आयतन $10^6 \times m^3$	बांध आयतन $10^3 \times m^3$
1.	भाखरा	सतलज	226	9868	4130
2.	पंडोह	ब्यास	116	8141	32310
3.	कालागढ़	रामगंगा	126	2369	13507
4.	पांग	व्यास	133	8570	
5.	थीन	रावी	147	3300	
6.	कोठार	कोसी	155	4080	
7.	किशाउ	टोंस	253	2400	
8.	तर्बेला	सिन्धु	143	1367	142000
9.	मंगला	झेलम	118	7250	64491
निर्माणाधीन					
10.	टेहरी	भागीरथी	261	3539	
11.	लखवार	यमुना	192	580	

हिमालय के जलाशयों के आस-पास भूकम्पनीयता की घटनाएँ न होने की कारण वहां पर पाया जाने वाला क्षेप भ्रंश परिवेश हो सकता है जो जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता के लिए हितकर नहीं है। यही नहीं, ऐसी भूकम्पनीयता के लिए प्राथमिक आवश्यकता है क्रान्तिक रूप से प्रतिबलित शैल स्तर का कम गहराई ($\sim$ 10 किमी०) में उपलब्ध होना जिससे रंध्र द्रव दाब बढ़ता है या जलाशय भारण के कारण बर्धित प्रतिबल से भूकम्प असफल हो जाता है। हिमालय की पाद पहाड़ियों में यांत्रिकी दृष्टि से अपेक्षतया अक्षम अवसादी निर्माण का मोटा स्तर रहता है उपर्युक्त प्रतिबन्ध पूरा नहीं हो पाता।

गुप्ता तथा राजेन्द्रन ने यह भी संकेत किया है कि हिमालय के जलाशयों में प्राकृतिक रूप से आने वाले भूकम्प के खतरे की मात्रा जलाशय प्रेरित भूकम्पनीयता से अधिक चिकट है। भूतकाल में हिमालय के बांध वाले स्थानों के आस-पास अनेक बड़े-बड़े भूकम्प आ चुके हैं। इन जलाशयों के जीवन काल में ही ऐसे भूकम्प आ सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मै श्री शशिधरन के प्रति इस पाण्डुलिपि की तैयारी में सहयोग देने के लिए कृतज्ञ हूँ।

निर्देश

1. कार्डर, डी० एस०, Seismic investigations in the Boulder Dam area, 1940-1944, and the influence of Reservoir loading on Earthquake activity. Bull. Seismol. Soc. Am., 1945, **35**, 175.
2. रोथे, जे० पी०, Fill a Lake , Start an Earthquake, New Sci. 1968, **39**, 75.
3. गुहा, एस० के०, गोसावी, पी० डी०, वर्मा, एम० एम०, अग्रवाल, एस० पी०, पडाले, जे० जी० तथा मारवाडी, एस०सी०, Recent seismic disturbances in the Koyna Hydroelectric Project, Maharashtra, India. Report, Central Water and Power Research Station, India 1968.
4. गुप्ता, एच० के०, तथा रस्तोगी, बी० के०, Dams and Earthquakes, Amsterdam, Elsevier, 1976.
5. गुप्ता, एच० के० The present status of reservoir induced seismicity investigations with special emphasis on Koyna Earthquake, Tectonophysics, 1985, **118**, 257.
6. केबीसी, आर० एम०, मामून, एम०, इब्राहीम, ई०, मेगाहेड, ए०, सिम्पसन, डी० डब्लू० तथा लीथ, डब्लू० एस०, Earthquake Studies at Aswan Reservoir, Jour. Geodynamics, 1987, 7, 173.
7. पाटिल, डी० एन०, भोसले, वी० एन०, गुहा, एस० के० तथा पावर, के० बी०, Reservoir induced seismicity in the vicinity of Lake Bhatsa, Maharashtra, India, Phys. Earth and Planet. Inter., 1986, **44**, 73.
8. सिम्पसन, डी०डब्लू०, Seismicity changes associated with Reservoir Loading, Eng. Geol, 1976, **10**, 123.
9. शोल्ज, सी० एच०, साइक्स, एल० आर० तथा अग्रवाल, वाई०पी०, Earthquake Prediction: a Physical Basis, Science, 1973, **181**, 803.

10. गुप्ता, एच० के०, रस्तोगी, वी० के० तथा हरिनारायण, Some discriminatory characteristics of Earthquakes near the Kariba, Kremasta and Koyna Artificial Lakes, Bull. Seism. Soc. Am., 1972 b, **62**, 493.

11. वही, Common features of the Reservoir associated Seismic activities, Bull. Seism. Soc. Am., 1972 a, **62**, 481.

12. स्टुआर्ट-अलेक्जेंडर, डी० ई० तथा मार्क, आर० के०, Impoundment-induced Seismicity associated with Large Reservoirs, U. S. Geological Survey, Open File Report 1976, **76**, 770.

13. चन्द्रा, यू०, Seismicity, Earthquake Mechanisms and Tectonics along the Himalayan mountain range and vicinity, Phys. Earth. Planet. Inter., 1978, **6**, 109.

14. गुप्ता, एच० के० तथा राजेन्द्रन, के०, Larger artificial water reservoirs in the vicinity of the Himalayan foothills and reservoir-induced seismicity, Bull. Seismo. Soc. Am., 1986, **76**, 205.

15. जैकोब, के० एच०, पनिंगटन, डब्लू० डी०, आर्मब्रस्टर, जे०, सीबर, एल० तथा फर्हतुल्ला, एस० Tarbela reservoir, Pakistan : A region of compressional tectonics with reduced Seismicity upon initial Reservoir filling, Bull. Seism. Soc. Am., 1979, **69**, 1175.

16. तलवानी, पी० तथा अक्री, एस०, Pore Pressure diffusion and the Mechanism of Reservoir Induced Seismicity, Bull. Seism. Soc, Am. (प्रेस में).

Vijana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

सिडान-टेल्याकोव्सकी प्रमेय का सामान्यीकरण

सुशील शर्मा
गणित विभाग, शासकीय कालिदास कन्या महाविद्यालय,
उज्जैन (म० प्र०)

[प्राप्त—फरवरी 10, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में विख्यात सिडान-टेल्याकोव्सकी प्रमेय का सामान्यीकरण इसके समाकलनीयता प्रतिबन्ध के स्थान पर पर्याप्त दुर्बल प्रतिबन्ध रखकर किया गया है।

Abstract

Genralizations of the Sidon-Telyakovskii theorem. *By* Sushil Sharma, Department of Mathematics, Government Kalidas Girls College, Ujjain (M.P.)

In this paper we generalize the well-known Sidon-Telyakovskii theorem by replacing its integrability condition by a considerably weaker condition.

1. प्रस्तावना

टेल्याकोव्सकी[1] ने कोज्या श्रेणी की सिडान समाकलनीयता का एक संक्षिप्त समतुल्य रूप ज्ञात किया। उसने वास्तविक शून्य अनुक्रम के वर्ग S की परिभाषा दी है। वास्तविक शून्य अनुक्रम $\{a_n\}$ S से सम्बद्ध होता है यदि कोई ऐसा एकदिष्ट अनुक्रम होता है जिससे

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$$

तथा

$$|\Delta a_n| \leqslant A_n \tag{1.1}$$

समस्त n के लिए।

सिडान-टेल्योकोव्सकी प्रमेय कहता है कि यदि $\{a_n\} \in S$ तो श्रेणी

$$a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

अपने योगफल f की फूरियर श्रेणी है तथा

$$||S_n(f)-f||=0(1),\ n\to\infty,$$

समतुल्य है $a_n \lg n=0(1),\ n\to\infty$ के जहाँ

$$S_n(f)=S_n(f,\ x)=a_0/2+\sum_{n=1}^{n} a_k \cos kx$$

तथा $||.||$ सूचक है $L^1\ (0, \pi)$-norm का ।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य (1.1) को निम्नलिखित प्रतिबन्ध में दुर्बल बनाना है

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{|\Delta c(k)|^p}{A_k{}^p}=O(1),\ n\to\infty \tag{1.2}$$

जहाँ $1/2<\alpha\leqslant 1$ तथा $p>1$, $\{A_n\}$ एक ऐसा एकदिष्ट अनुक्रम है कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n<\infty$$

तथा $\{c(n)\}$ संमिश्र संख्याओं का शून्य अनुक्रम है । संमिश्र त्रिकोणमितीय श्रेणी

$$\sum_{|n|<\infty} c(n)\ e^{int},\ t\in T=R|2\pi Z,$$

के ज्या अंश को नियन्त्रित करने के लिए विशेष प्रतिबन्ध की आवश्यकता है। संमिश्र शून्य अनुक्रम $\{(u)\gamma\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta c(n)-c(-n)|.$$

$\lg n<\infty$, की तुष्टि करता है यह दुर्बल सम है । स्पष्ट है कि यदि $\{c(n)\}$ एक सम अनुक्रम हो तो हय दुर्बल सम होता है ।

सम्मिश्र त्रिकोणमितीय रूपान्तर

$$\sum_{|n|<\infty} c(n)\, e^{int}$$

के आंशिक योगफलों को

$$S_n(c)=S_n(c, t)=\sum_{|k|\leqslant n} c(k)\, e^{ikt}$$

द्वारा व्यक्त किया जावेगा। यदि यह रूपान्तर किसी $f \in L^1$ का फूरियर हो तो हम $c(n)=\hat{f}(n)$ समस्त n के लिए तथा $S_n(c, t)=S_n(f, t)$ लिखेंगे।

हमें अपना परिणाम तैयार करने में निम्नलिखित परिभाषा उपयोगी होगी।

परिभाषा : संकुल संख्याओं का एक दुर्वल सम शून्य अनुक्रम $\{c(n)\}$ Sp^* से सम्बद्ध होता है जो किसी $1<p\leqslant 2$ तथा किसी एकदिष्ट $\{A_n\}$ के लिए हो जिससे कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} A<\infty$$

तो प्रतिबन्ध (1.2) लागू होता है।

2. हम इस प्रपत्र में निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : माना कि $\{c(n)\ S_p^*$, तो

(i) $t\neq 0$ के लिए $\lim_{n\to\infty} S_n(c, t)=f(t)$ का अस्तित्व है।

(ii) $f \in L^1(T)$;

(iii) $||S_n(f)-f||=0(1),\ n\to\infty$

$|n|\to\infty$.

समतुल्य है $\hat{f}(n)\lg|n|=0(1)$ के

उपपत्ति : यह दिखलाने के लिए कि प्रतिबन्ध (1.2) का अर्थ (i) है, यह दिखाना काफी होगा कि $\{c(n)\}$ परिवद्ध विचरण वाला है। निस्सन्देह—

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta c(k)|=\sum_{k=1}^{n-1} [\Delta A_k] \sum_{j=1}^{k} \frac{|\Delta c(j)|}{A_j}+A_n \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta c(j)}{A_j}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha}[\Delta A_k] \left(\frac{1}{k^{\alpha}} \sum_{j=1}^{k} \frac{|\Delta c(j)|^p}{A_j{}^p}\right)^{1/p} + n^{a} A_n \left(\frac{1}{n^{a}} \sum_{j=1}^{n} \frac{|\Delta c(j)|^p}{A_j{}^b}\right)^{1/p}$$

जहाँ $1/2 < a \leqslant 1$.

अतः $\{c(n)\}$ परिबद्ध विचरण का है तथा $t \neq 0$ के लिए $\lim_{n\to\infty} S_n(c, t)$ का अस्तित्व है। हम इस परिसीमा को $f(t)$ द्वारा व्यक्त करते हैं। यह सिद्ध करने के लिए कि $f \in L^1(T)$ हमें गैरेट तथा स्टैनो-जेविक[1, 2] द्वारा प्रचारित परिवर्धित त्रिकोणमितीय योगफलों के संकुल रूप की आवश्यकता होगी। माना कि $D_n(t) = \sin(n+1/2)t/(\sin t/2)$ संकुल दशा में डिरिक्लेट अष्टि को सूचित करता है तथा माना कि

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}.$$

तो

$$S_n(c, t) - (c(n))\, E_n(t) + c(-n)\, E_{-n}(t)$$

$$g_n(c, t) = \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta(c(-k) - c(k))\, (E_{-k}(t) - 1) - c(-n) + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta c(k)\, D_k(t).$$

(i) से यह निकलता है कि $t \neq 0$ के लिए

$$f(t) - g_n(c, t) = \sum_{k=n}^{\infty} \Delta c(k)\, D_k(t) + \sum_{k=n}^{\infty} (\Delta c(-k) - c(k))\, E_{-k}(t).$$

पिछले तत्समक से हमें

$$\|f - g_n(c)\| \leqslant \int_T \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta c(k)\, D_k(t) \right| dt + B_1 \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta(c(-k) - c(k))| \lg n,$$

आकलन प्राप्त होगा जहाँ B_1 चरम अचर है। चूँकि $\{c(n)\}$ दुर्बल रूप से सम है अतः उपर्युक्त असमिका के दायीं ओर का दूसरा पद भी $0(1)$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$। इस तरह

$$\|f - g_n(c)\| \leqslant B_2 \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta c(k)\, D_k(t) \right| dt + 0(1),\ n \to \infty,$$

जहाँ B_2 एक चरम अचर है। अभी यह दिखाना शेष रह जाता है कि पिछली असमिका के दायीं ओर के समाकल का लोप हो जाता है ज्यों ज्यों $n \to \infty$.

$t \neq 0$ के लिए निम्नलिखित तत्समक पर विचार करें

$$\sum_{k=n}^{\infty} \Delta c(k)\, D_k(t) = \sum_{k=n-1}^{\infty} \Delta A_k \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) - A_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t)$$

तब

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta c(k)\, D_k(t) \right| dt \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \Delta A_k \int_0^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt$$

$$+ A_n \int_0^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt.$$

उपर्युक्त असमिका के दायीं ओर के दोनों समाकलों का भी आकलन इसी प्रकार किया जा सकता है, अर्थात्

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt = \int_0^{\pi/N} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt$$

$$+ \int_{\pi/N}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt = I_N + J_N$$

डिरिक्लेट अष्टि के एकसमान आकलन को फिर से स्मरण करते हुए—

$$I_N \leqslant B_3 \sum_{j=1}^{N} \frac{|\Delta c(j)|}{A_j} \leqslant B_3\, N^{\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} \frac{|\Delta c(j)|^p}{A_j{}^p} \right)^{1/p}$$

जहाँ B_3 चरम अचर है । द्वितीय समाकल

$$J_N = \int_{\pi/N}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} D_j(t) \right| dt = \int_{\pi/N}^{\pi} \frac{1}{\sin t/2} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} \sin\,(j+\tfrac{1}{2})t \right| dt,$$

का मान निकालने के लिए सर्वप्रथम हम होल्डर असमिका का सम्प्रयोग करेंगे जहाँ

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 0,$$

$$J_N \leqslant \left[\int_{\pi/N}^{\pi} \left(\frac{1}{\sin t/2} \right]^p dt \left[\left[_0^{\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta c(j)}{A_j} \sin(j+\tfrac{1}{2})t \right|^q dt \right]^{1/q}$$

उसके बाद हौसडार्फ यंग की असमिका

$$J_N \leqslant B_4 N^{1/q} \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{|\Delta c(j)|^p}{A_j^p}\right]^{1/p}$$

अन्त में

$$J_N \leqslant B_4 N^{\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha}} \sum_{j=1}^{N} \frac{|\Delta c(j)|^p}{A_j^p}\right)^{1/p}$$

जहाँ B_4 चरम अचर है। इस तरह

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n}^{\infty} \Delta c(k)\ D_k(t) \right| dt \leqslant B_5 \sum_{k=n}^{\infty} k \Delta A_k + B_6 n\ A_n$$

जहाँ B_5 तथा B_6 चरम अचर हैं। चूंकि

$$\sum_{n=1}^{\infty} A < \infty,$$

अतः उपर्युक्त असमिका के दायीं ओर के दोनों पद $0(1)$ हैं ज्यों ज्यों $n \to \infty$ इसलिए

$$||f - g_n(c)|| = 0(1),\ n \to \infty,$$

और चूंकि g_n एक बहुपद, इसका अर्थ हुआ कि f समाकलनीय है। इससे (ii) की उपपत्ति पूरी होती है।

अब (iii) की उपपत्ति

$$\Big|\, ||f - S_n(f)|| = ||\hat{f}(n)\ E_n + \hat{f}(-n)\ E_{-n}|| \,\Big| \leqslant ||f - g_n(c)|| = 0(1),\ n \to \infty.$$

से तथा [5] में इस तथ्य से कि

$$||\hat{f}(n)\ E_n + \hat{f}(-n)\ E_{-n}|| = 0(1),\ n \to \infty$$

समतुल्य है

$$\hat{f}(n) \lg |n| = 0(1),\ |n| \to \infty,$$ के

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० यू० बी० तिवारी का कृतज्ञ है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. गैरेट, जे० डब्लू तथा स्टैनोजेविक, सी० वी० Proc. Amer. Math. Soc. 1976, **54** 101-105.

2. वही, Proc. Amer. Math. Soc. 1976, **60**, 68-72.

3. सिडान, एस०, London Math. Soc. 1939, (2) **14**, 158-160.

4. टेल्याकोव्सकी, एस० ए०, Math. Notes. 1973, **14**, 742-748.

5. स्टैनोजेविक, सी० वी० तथा वैरी, डब्लू० ओ०, Trans. Amer. Math. Soc. 1983, **275**, 59-69.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

बहुचर H-फलन वाला एक समाकल

आर० के० सक्सेना तथा चेना राम
गणित तथा सांख्यिकी विभाग,
जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर (राज०)

[प्राप्त—मई 6, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हाइपरज्यामितीय फलन तथा श्रीवास्तव एवं पंडा के बहुचर H-फलन का मान गौतम तथा गोयल द्वारा परिभाषित r चरों वाले A-फलनों के पदों में निकालना है।

Abstract

An integral involving multivariable H-function. *By* R. K. Saxena and Chena Ram, Department of Mathematics and Statistics, University of Jodhpur, Jodhpur (Rajasthan).

The object of this paper is to evaluate an integral involving hypergeometric function and a multivariable H-function due to Srivastava and Panda [8] in terms of A-function of r-variables defined by Gautam and Goyal [1]. The integral evaluated in this paper extends the result of Sharma [6],

1. प्रस्तावना

गौतम तथा गोयल[1] के अनुसार हम बहुचर A-फलन को निम्नवत् परिभाषित करते हैं :

$$A[z_1, \ldots, z_r] = A^{m, n; m_1, n_1; \ldots, m_r, n_r}_{p, q; p_1, q_1; \ldots; p_r, q_r}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (a_j; A_j', \ldots, A_j^{(r)})_{1, p} \\ (b_j; B_j', \ldots, B_j^{(r)})_{1, q} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ; (\tau_j', C_j')_{1, p_1}; \ldots; (\tau_j^{(r)}, C_j^{(r)})_{1, p_r} \\ ; (d_j', D_j')_{1, q_1}; \ldots; (d_j^{(r)}, D_j^{(r)})_{1, q_1} \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \theta_1(s_1) \ldots \theta_r(s_r)\, \phi(s_1, \ldots, s_r)\, z_1^{s_1} \ldots z_r^{s_r}\, ds_1 \ldots ds_r \quad (1.1)$$

जहाँ

$$w = \sqrt{(-1)},$$

$$\theta_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{m_i} (d_j^{(i)} - D_j^{(i)} s_i) \prod_{j=1}^{n_i} \Gamma(1 - \tau_j^{(i)} + C_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=m_i+1}^{q_i} \Gamma(1 - d_j^{(i)} + D_j^{(i)} s_i) \prod_{j=n_i+1}^{p_i} \Gamma(\tau_j^{(i)} - C_j^{(i)} s_i)}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, r) \quad (1.2)$$

$$\phi(s_1, \ldots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \sum_{i=1}^{r} A_j^{(i)} s_i) \prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - \sum_{i=1}^{r} B_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \sum_{i=1}^{r} A_j^{(i)} s_i) \prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \sum_{i=1}^{r} B_j^{(i)} s_i)} \quad (1.3)$$

यहाँ पर $m, n, p, q, m_j, n_j, p_j$ तथा अनृण संख्याएँ हैं तथा समस्त

$$a_j' s, b_j' s, d_j^{(i)} 's, \tau_j^{(i)} ' s, A_j^{(r)} ' s, B_j^{(r)} ' s$$

संमिश्र संख्याएँ हैं।

r चरों वाले A-फलन को परिभाषित करने वाला बहुगुण समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है यदि

$$\xi_i^* = 0, \eta_i > 0$$

तथा

$$|\arg(\zeta_i) z_k| < \frac{\pi}{2} \eta_i.$$

जहाँ

$$\zeta_i = \prod_{j=1}^{p} \left\{A_j^{(i)}\right\}^{A_j^{(i)}} \prod_{j=1}^{q} \left\{B_j^{(i)}\right\}^{-B_j^{(i)}} \prod_{j=1}^{q_i} \left\{D_j^{(i)}\right\}^{D_j^{(i)}} \prod_{j=1}^{p_i} \left\{C_j^{(i)}\right\}^{-C_j^{(i)}},$$

$$i \in \{1, \ldots, r\};$$

$$\xi_i^* = Im \left[\sum_{j=1}^{p} A_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{q_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{p_i} C_j^{(i)}\right],$$

$$i \in \{1, \ldots, r\};$$

$$\eta_i = R \left[\sum_{j=1}^{n} A_j^{(i)} - \sum_{j=n+1}^{p} A_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m} B_j^{(i)} - \sum_{j=m+1}^{q} B_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)}\right.$$

$$\left. - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)}\right],$$

$$i \in \{1, \ldots, r\}.$$

यदि हम $A_j' s$, $B_j' s$, $C_j' s$, तथा $D_j' s$ को वास्तविक तथा धनात्मक तथा $m=0$ मान लें तो A-फलन श्रीवास्तव तथा पण्डा[8] के बहुचर H-फलन में समानीत हो जाता है जो स्वयं भी सक्सेना[5] द्वारा दिये गये r-चरों वाले H-फलन का सार्वीकरण है।

A-फलन का विस्तृत विवरण गौतम तथा गोयल[1] के मूल प्रपत्र में देखा जा सकता है। इस सन्दर्भ में निर्देश [**2**, पृष्ठ 67-70] भी देखें।

2. वांछित परिणाम

अगले विश्लेषण में हमें निम्नलिखित समाकल [6, p. 140] की आवश्यकता होगी

$$\int_a^b (x-a)^{u-1} (b-x)^{v-1} (x-c)^{-u-v} {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u+v+1); \delta; \right.$$

$$\left. 4 \frac{(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}\right] dx$$

$$= (b-a)^{u+v-1} (b-c)^{-u} (a-c)^{-v} \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)\,\Gamma(\delta)\,\Gamma(\delta-u-v)}{\Gamma(u+v)\,\Gamma(\delta-u)\,\Gamma(\delta-v)} \tag{2.1}$$

जहाँ

$$R(u) > 0,\ R(v) > 0,\ R(\delta-u-v) > 0,\ c<a<b.$$

3. समाकल

हम निम्नलिखित समाकल सिद्ध करेंगे

$$\int_a^b (x-a)^{u-1} (b-x)^{v-1} (x-c)^{-u-v} \, {}_2F_1\left[\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u+v+1); \delta; 4R\right]$$

$$\times H[z_1 X_1, \ldots, z_r X_r] \, dx$$

$$=(b-a)^{u+v-1} (b-c)^{-u} (a-c)^{-v} \frac{\Gamma(\delta)\, \Gamma(\delta-u-v)}{\Gamma(u+v)}$$

$$\times A^{1, n+1; m_1, n_1; \ldots; m_r, n_r}_{p+2, q+2; p_1, q_1; \ldots; p_r, q_r} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} I_1 \\ \\ I_2 \end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ

$$R=\frac{(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}, \tag{3.2}$$

$$X_i=\left[\frac{(b-c)(x-a)}{(a-c)(b-x)}\right]^{\alpha_i}, \forall\, i \in \{1, \ldots, r\} \tag{3.3}$$

$$I_1=(1-u; \alpha_1, \ldots, \alpha_r); (a_j; A_j', \ldots, A_j^{(r)})_{1, p}; (\tau_j', C_j')_{1, p_1};$$

$$\ldots; (\tau_j^{(r)}, C_j^{(r)})_{1, p_r}; (\delta-u; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

$$I_2=(v; \alpha_1, \ldots, \alpha_r); (b_j; B_j', \ldots, B_j^{(r)})_{1, q}; (d_j', D_j')_{1, q_1};$$

$$\ldots; (d_j^{(r)}, D_j^{(r)})_{1, q_r}; (1-\delta+v; \alpha_1, \ldots, \alpha_r).$$

(3.1) की वैधता के (पर्याप्त) प्रतिबन्ध नीचे दिये जा रहे हैं

(i) $$c<a<b,\ R(\delta-u-v)>0,\ R(u+\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i)>0,$$

$$R(v-\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \xi_i)>0,\ \alpha_j > 0 \forall j; \tag{3.4}$$

जहाँ $\xi_i = \min_{1 \leqslant j \leqslant m_i} \left[R\left(d_j^{(i)} / D_j^{(i)}\right)\right], \forall i \in \{1, \ldots, r\}$.

(ii) $\Omega_i > 0, |\arg z_i| < \frac{1}{2}\Omega_i \pi, \forall\ i \in \{1, \ldots, r\}$

जहाँ $$\Omega_i \equiv -\sum_{j=n-1}^{p} A_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} B_j^{(i)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} > 0, \forall\ i \in \{1, \ldots, r\}.$$

(3.1) की उपपत्ति : समाकल (3.1) का मान निकालने के लिए सर्वप्रथम हम बहुचर H-फलन को बहुगुणित मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल (1.1) के पदों में ($m=0$ के समेत) व्यक्त करते है तथा s_i-समाकलों एवं x-समाकल के क्रम को परस्पर बदलने पर, जो दिए हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, (3.1) का वामपक्ष (मान लो Δ) निम्न रूप धारण करता है

$$\Delta = \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi(s_1, \ldots, s_r)\, \theta_1(s_1) \ldots \theta_r(s_r) z_1^{s_1} \ldots z_r^{s_r}$$

$$\times (b-c)^{\sum_{i=1}^{r} a_i s_i} (a-c)^{-\sum_{i=1}^{r} a_i s_i} \left[\int_a^b (x-a)^{u+\sum_{i=1}^{r} a_i s_i - 1}\right.$$

$$\times (b-x)^{v-\sum_{i=1}^{r} a_i s_i - 1} (x-c)^{-u-v}\, {}_2F_1\Big[\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(u+v+1); \delta;$$

$$\left.\frac{4(x-a)(b-x)(b-c)(a-c)}{[(x-c)(b-a)]^2}\Big] dx\right] ds_1 \ldots ds_r \tag{3.5}$$

(2.1) की सहायता से x-समाकल का मान ज्ञात करने तथा प्राप्त परिणाम की व्याख्या r संमिश्र चरों वाले A-फलन के पदों में करने के पर सरलता से परिणाम निकल आता है ।

4. विशिष्ट दशाएँ

(i) यदि हम $n=p=q=0$ लें तो बहुचर H-फलन r H-फलन के गुणफलनों में टूट जाता है और हमें निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है

$$\int_a^b (x-a)^{u-1} (b-x)^{v-1} (x-c)^{-u-v} {}_2F_1 [\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(u+v+1); \delta; 4R]$$

$$\times \prod_{i=1}^{r} H^{m_i, n_i}_{p_i, q_i} \left[z_i X_i \left| \begin{matrix} (\tau_j^{(i)}, & C_j^{(i)})_{1, pi} \\ (d_j^{(i)}, & D_j^{(i)})_{1, qi} \end{matrix} \right. \right] dx$$

$$=(b-a)^{u+v-1} (b-c)^{-u} (a-c)^{-v} \frac{\Gamma(\delta)\,\Gamma(\delta-u-v)}{\Gamma(u+v)}$$

$$\times A^{1, 1; m_1, n_1; \ldots ; m_r, n_r}_{2, 2; p_1, q_1; \ldots; p_r, q_r} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix} \left| \begin{matrix} F_1 \\ \\ F_2 \end{matrix} \right. \right] \tag{4.1}$$

जहाँ R तथा X_i क्रमशः (3.2) एवं (3.3) द्वारा परिभाषित हैं तथा

$$F_1=(1-u; a_1, \ldots, a_r); (\tau_j', C_j')_{1, p_1}; \ldots; (\tau_j^{(r)}, \quad C_j^{(r)})_{1, pr};$$

$$(\delta-u; a_1, \ldots, a_r).$$

$$F_2=(v; a_1, \ldots, a_r); (d_j', D_j')_{1, q_1}; \ldots; (d_j^{(r)}, \quad D_j^{(r)})_{1, qr};$$

$$(1-\delta+v; a_1, \ldots, a_r)$$

(4.1) की वैधता के (पर्याप्त) प्रतिबन्ध नीचे दिये जा रहे हैं :

(i) प्रतिबन्ध (3.4) लागू हो ।

(ii) $\delta_i^* > 0, |\arg z_i| < \frac{1}{2} \delta_i^* \pi, \forall\ i \in \{1, \ldots, r\}$

जहाँ

$$\delta_i^* \equiv \sum_{j=1}^{m_i} D_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} D_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} C_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} C_j^{(i)} > 0.$$

(ii) अन्त में यदि हम (4.1) में $r=1$ रखें तो यह शर्मा[6] द्वारा प्रदत्त परिणाम में समानीत हो जाता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक चेना राम सी० एस० आई० आर० के प्रति सीनियर रिसर्च फेलोशिप प्रदान करने हेतु कृतज्ञता व्यक्त करता है।

निर्देश

1. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन०, Univ. Nac. Tucuman Rev. Ser. A (स्वीकृत)
2. गौतम, जी० पी० इत्यादि, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1986, **29**, 67-81.
3. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Generalized hypergeometric functions with applications in Statistics and Physical Sciences, Lecture Notes Series No. 348, Springer-Verlag, Heidelberg, 1973.
4. वही, The *H*-functions with Application in Statistics and Other Disciplines, John Wiley and Sons, New York, 1978.
5. सक्सेना, आर० के०, Kyungpook Math. J., 1974, **14**, 255-259.
6. शर्मा, आर० के०, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1987, **30**, 139-143.
7. श्रीवास्तव, एच० एम० इत्यादि The *H*-function of One and Two Variables with Applications, South Asian Publishers, New Delhi, 1982.
8. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Reine Angew. Math., 1976, **288**, 129-145.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 2, 1990

अधिशोषण द्वारा निकिल का उसके जलीय विलयनों से विलगन : ताप का प्रभाव

योगेश चन्द्र शर्मा, गुरु प्रसाद तथा दिनेश चन्द्र रूपैनवार

प्रयुक्त रसायन विभाग, प्रौद्योगिक संस्थान, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—दिसम्बर 14, 1989]

सारांश

जलीय विलयनों से वोलस्टोनाइट पर अधिशोषण द्वारा निकिल के विलगन की संभाव्यता का अध्ययन किया गया। विलयन की सान्द्रता 50 मिग्रा/लीटर, पी-एच 2.5 एवं 30° से० पर निकिल का विलगन अधिकतम पाया गया। अभिक्रिया ऊष्माक्षेपी है एवं ऊष्मागतिक अध्ययन में $\Delta G°$, $\Delta H°$ $\Delta S°$ के मान निकाले गए।

Abstract

Removal of nickel by adsorption on wollastonite : Effect of temperature. *By* Y. C. Sharma, G. Prasad and D. C. Rupainwar, Department of Applied Chemistry, Institute of Technology, B. H. U., Varanasi-221 005.

Feasibility of nickel removal by adsorption on wollastonite has been studied. Maximum removal was observed at solution concentration of 50 mg/L, pH 2.5 and 30°C. The process of adsorption is exothermic and the parameters $\Delta G°$, $\Delta H°$ and $\Delta S°$ were studied mathematically in order to explain the process thermodynamically.

जीवधारियों पर निकिल के विषैलें प्रभाव पूर्णतः प्रतिपादित हैं[1]। विभिन्न उद्योगों यथा धात्विक उपकरण निर्माण, बर्तनों पर कलई करने एवं अनेक संस्थानों में इस धातु का उपयोग बहुतायत से होता है। इन उद्योगों के अपशिष्ट जल के साथ नदियों एवं अन्य गतिमान जल स्रोतों में मिलकर निकिल जीवधारियों, वनस्पतियों एवं पर्यावरण पर हानिकारक प्रभाव डालता है। वाटरास इत्यादि[2] ने प्रयोगों

में पाया कि धात्विक आयन वनस्पतियों के लिए अत्यंत विषैला है। निकिल के प्रतिपादित विषैले गुणों में इसका कैंसरजन होना भी प्रमुख है[1]। सेयर ने[3] इसकी घातक सान्द्रता 50 माइक्रोग्राम प्रति लीटर निर्धारित की है।

अपशिष्ट जल के उपचार हेतु आयन-विनिमय, उपयुक्त अवक्षेपक द्वारा अवक्षेपण एवं विलायक-निष्कर्षण आदि प्रमुख विधियां हैं[4] परन्तु आजकल अधिशोषण जल उपचार की अत्यन्त लोकप्रिय तकनीक है[5,6]। विकसित देशों में अधिशोषण द्वारा जल से प्रदूषकों के विलगन हेतु सक्रियित चारकोल एवं सक्रियित कार्बन का उपयोग नियमित रूप से किया जा रहा है[7] परन्तु भारत जैसे विकासशील देश में सक्रियित कार्बन का प्रयोग औद्योगिक स्तर पर संभव नहीं है। इसी तथ्य को ध्यान में रखते हुए हमने अपनी प्रयोगशाला में सस्ते अधिशोषकों द्वारा अपशिष्ट जल एवं जलीय विलयनों से धात्विक एवं अन्य प्रदूषकों के विलगन का संभव प्रयास किया है[8,9]। प्रस्तुत निबन्ध में एक अत्यन्त सस्ते अधिशोषक, वोलस्टोनाइट, का उपयोग जल से निकिल के विलगन में किया गया है एवं विलगन पर ताप के प्रभाव पर प्रकाश डाला गया है।

प्रयोगात्मक

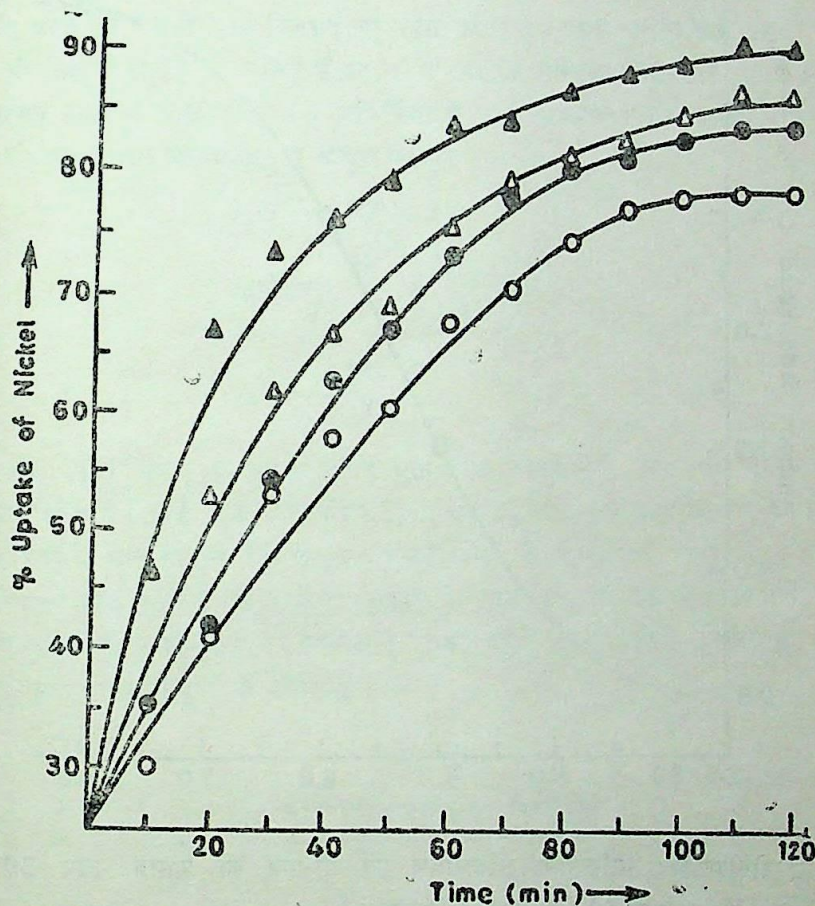
प्रयोगों में प्रयुक्त सभी रसायन विश्लेषात्मक कोटि के थे एवं बी० डी० एच०, बम्बई द्वारा प्रदत्त थे। अधिशोषक वोलस्टोनाइट, वोल्केम प्रा० लि०, उदयपुर, राजस्थान द्वारा उपलब्ध कराया गया। अतिरिक्त व्यय को बचाने के लिए अधिशोषक को बिना किसी पूर्व-उपचार के, 100 माइक्रोमीटर व्यास की छिद्रयुक्त चलनी से मात्र छानकर प्रयोग किया गया। वोलस्टोनाइट के अन्य गुणों की परीक्षा मानक विधियों द्वारा की गयी[10]। प्रयोगों में प्रयुक्त निकिल की विभिन्न सान्द्रताओं के जलीय विलयनों का 50 मिली० आयतन उपर्युक्त अधिशोषक की 1.0 ग्राम मात्रा के साथ 30° से० ताप, पी-एच 2.5 पर बन्द पालीथीन बोतलों में 125 चक्र प्रति मिनट की दर से बन्द तापस्थापी में संतृप्तता तक हिलाया गया। प्राप्त विलयन को अपकेन्द्रित्र में 5000 चक्र प्रति मिनट की दर से अपकेन्द्रित करने के पश्चात् अधिशोषण की प्रगति, स्पेक्ट्रमी प्रकाशमापी (स्पेक्ट्रानिक **20**, बाश एवं लोम्ब) द्वारा अधिप्लव द्रव में निकिल की बची हुई सान्द्रता ज्ञात करके की गयी।

परिणाम तथा विवेचना

अधिशोषक के विश्लेषण से ज्ञात होता है कि सिलिका एवं कैल्सियम आक्साइड इसके प्रमुख अवयव हैं (सारणी 1)। अन्य धात्विक आक्साइडों की उपस्थिति अत्यन्त अल्प मात्रा में है। इससे ऐसा अनुमान होता है कि अधिशोषण सिलिका अथवा कैल्सियम आक्साइड अथवा इन दोनों की सतहों पर ही होता है।

सान्द्रता एवं सम्पर्क समय का प्रभाव

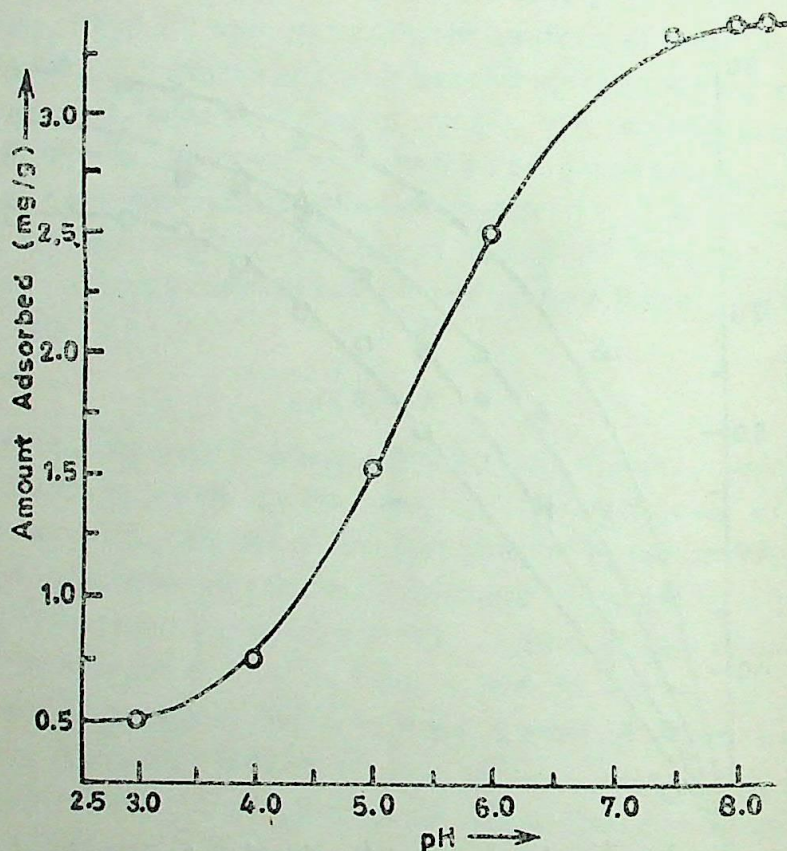
विभिन्न सान्द्रताओं पर निकिल के विलगन से यह सिद्ध होता है कि विलगन की गति प्रारम्भ में तीव्र है एवं समय के साथ मन्द होती जाती है। साथ ही यह भी ज्ञात होता है कि तनु सान्द्रता के

विलयन से अधिशोष्य का विलगन अधिक होता है एवं 110 मिनट पर विलगन में संतृप्तता आ जाती है (चित्र 1)। प्रयोगों में प्रयुक्त निकिल की सान्द्रताओं में से अधिकतम विलगन 50 मिग्रा० प्रति लीटर की सान्द्रता वाले विलयन से 30° से० एवं 2.5 पी-एच पर हुआ। विलयन की आयनिक शक्ति 0.01 मोल $NaClO_4$ रखी गयी।

चित्र 1 : वोलस्टोनाइट द्वारा निकिल के अधिशोषण की प्रक्रिया पर सान्द्रता एवं संपर्क समय का प्रभाव। ताप 3० सेग्रें०, पी-एच 6.5, विलयनों की सान्द्रताएँ 125 मिग्रा० प्रति लीटर (●), 100मि० ग्रा०प्रति लीटर (●) 75 मि० ग्रा० प्रति लीटर (△), एवं 50 मि०ग्रा० प्रति लीटर (△)।

अधिशोषण गतिकी

विलगन की प्रक्रिया की गतिकी का अध्ययन लैगरग्रीन की प्रथम कोटि के निम्न समीकरण

$$\log (q_e - q) = \log q_e - \frac{k_{ad}}{2.303} \times t \qquad (1)$$

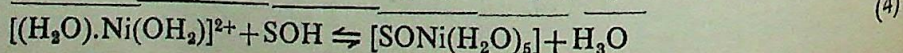
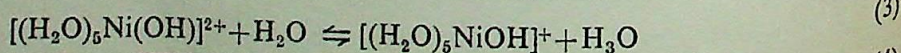
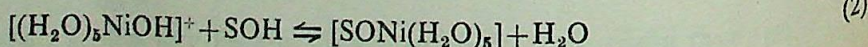
द्वारा किया गया जहाँ q_e एवं q (दोनों मि० ग्रा० प्रति ग्राम) विलयन में अधिशोष्य की क्रमशः संतृप्त अवस्था एवं किसी भी क्षण, t, पर मात्राएं हैं। k_{ad}, अधिशोषण स्थिरांक है। अधिशोषक के वेग-स्थिरांक का औसत मान 0.148 प्रति मिनट प्राप्त हुआ[9]।

चित्र 2 : वोलस्टोनाइट द्वारा निकिल के अधिशोषण पर पी-एच का प्रभाव, ताप 30° से० ग्रे०, विलयन की सान्द्रता 50 मि० ग्रा० प्रति लीटर।

पी-एच का प्रभाव

वोलस्टोनाइट द्वारा निकिल के विलगन में पी-एच एक अत्यन्त महत्वपूर्ण कारक पाया गया एवं विलगन बढ़ते हुए पी-एच के साथ क्रमशः बढ़ता है एवं पी-एच 8 पर अधिकतम हो जाता है[9]। अधिशोषक के पृष्ठ पर निम्नलिखित क्रियाओं की संभावना है[11]

$$[(H_2O)_5NiOH]^+ + SOH \leftrightharpoons [SONi(H_2O)_5] + H_2O \quad (2)$$

$$[(H_2O)_5Ni(OH)]^{2+} + H_2O \leftrightharpoons [(H_2O)_5NiOH]^+ + H_3O \quad (3)$$

$$[(H_2O).Ni(OH_2)]^{2+} + SOH \leftrightharpoons [SONi(H_2O)_5] + H_3O \quad (4)$$

ताप का प्रभाव

इस प्रकार की क्रियाओं पर ताप के प्रभाव का अध्ययन महत्वपूर्ण है क्योंकि यह कारक अभिक्रिया का ऊष्मागतिक आचरण एवं अंतःकण परिवहन इत्यादि की क्रियाविधि की व्याख्या करने में सहायक है। निकिल के विलगन में यह देखा गया कि विलगन की मात्रा एवं ताप में प्रतिलोम सम्बन्ध है अर्थात् बढ़ते हुए ताप के साथ विलगन की मात्रा घटती है। इससे अधिशोषण क्रिया का ऊष्माक्षेपी स्वरूप भी सिद्ध होता है[12]। प्रयोगों में यह पाया गया कि अभिक्रिया का ताप 30 से 50° से० बढ़ाने पर विलगन 89.5 से 50% हो गया। अभिक्रिया के उपर्युक्त आचरण की व्याख्या निम्नलिखित समीकरणों की सहायता से ऊष्मागतिकीय आधार पर की गयी।

$$\triangle G^\circ = -RT \ln k \qquad (5)$$

$$\triangle H^\circ = \ln \frac{k^{11}}{k^1} \cdot R\left(\frac{T_2.T_1}{T_2 - T_1}\right) \qquad 6)$$

$$\triangle S^\circ = \frac{\triangle H^\circ - G^\circ}{T} \qquad (7)$$

जहाँ $\triangle G^\circ$, $\triangle H^\circ$ एवं $\triangle S^\circ$ क्रमशः मानक मुक्त ऊर्जा, मानक पूर्ण ऊष्मा एवं मानक एन्ट्रोपी में परिवर्तन के द्योतक हैं। k, k^1 एवं k^{11} क्रमशः T, T_1 एवं T_2 तापों पर अभिक्रिया के वेग स्थिरांक हैं। इन तीनों कारकों के मान सारणी 2 में प्रस्तुत है। मुक्त ऊर्जा के ऋणात्मक मान उपर्युक्त अभिक्रिया की संभाव्यता को सिद्ध करते हैं एवं एन्थैल्पी ($\triangle H^\circ$) के मान (सारणी 2) वोलस्टोनाइट पर अधिशोषण द्वारा निकिल-विलगन की क्रिया का ऊष्माक्षेपी स्वरूप दर्शाते हैं। एन्ट्रोपी के घटते हुए मान अभिक्रिया के यादृच्छिक स्वरूप में कमी के द्योतक हैं।

सारणी 1

वोलस्टोनाइट का विश्लेषण

गुण	भार के अनुसार प्रतिशत
SiO_2	48.52
Al_2O_3	0.24
CaO	48.48
Fe_2O_3	0.26
कणों का औसत व्यास	48.10^{-4} सेमी०^2
सतह क्षेत्रफल	1.18 मी०^2 प्रति ग्राम
घनत्व	2.21 ग्राम प्रतिघन सेमी०
पी-एच	2.60

सारणी 2

निकिल के विलगन में ऊष्मागतिकीय कारकों के मान

ताप (से० ग्रे०)	ΔG° (कि० कैलोरी मोल$^{-1}$)	ΔH° (कि० कैलोरी मोल$^{-1}$)	ΔS° (एन्ट्रोपी इकाई)
30°	−0.051	25.26	83.53
40°	−1.37	16.09	55.78
50°	−1.92	8.27	25.62

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से योगेश चन्द्र शर्मा छात्रवृत्ति प्रदान करने लिए विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का आभारी हैं।

निर्देश

1. मुखर्जी, ए० जी०, गलगोटिया पब्लिकेशन, नई दिल्ली, 1986.
2. वाटरास, सी० जे०, मैक्फारलेन, जे० तथा मोरेल, एफ० एम० एम०, कैन० ज० फिश० एक्वे० सा० 1985, 42, 724
3. सेयर, आई० एम०, ज० अमे० वाटरवर्क्स एसो०, 1988, 78, 53-58
4. किम, जे० आई० तथा जूनियर, जे० जैड०, प्रोग० वाटर० टैक, 1977, 19, 143-55
5. कुत्सल, वाई० एस० टी०, बायोटैक्नोलॉजी लेटर्स 1989, 11, 141-145.
6. एलैन, एस० जे०, मैके, जी० तथा खदेर, के० वाई० एच०, एन० पाल्यूट०, 1988, 56, 39-53.
7. तिवारी, पी० एच०, कैम्पबैल, ए० आर० तथा ली० डब्ल्यू०, कैन० ज० केमि० 1972, 50 1642-1657.
8. शर्मा, वाई० सी०, प्रसाद, जी० तथा रूपैनवार, डी० सी०, आई०ए०डब्ल्यू० पी०सी० टैक्नीकल एनुअल, 1988, 181-185.

9. शर्मा, वाई० सी०, प्रसाद, जी० तथा रूपैनवार, डी० सी० वाटर, एयर एन्ड सायल पाल्यूट (स्वीकृत) ।

10. इण्डियन स्टै० मैथड्स आफ कैमि० एना० आफ फायर क्ले एण्ड सिलिका रैफ्रेक्टरी मैटेरियल्स 1960, आई० एस० : 1527.

11. स्टम, डब्ल्यू०, एक्वैटिक सरफेस कैमिस्ट्री, विले इण्टरसाइंस पब्लिकेशन, न्यूयार्क, 1987, पृष्ठ 99.

12. गुप्ता, जी० एस०, प्रसाद जी० तथा सिंह, वी०एन०, जर्न० एन० सा० एण्ड हैल्थ 1988, **23 (3)**, 205-217.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

लारिसेला फलनों वाले कतिपय द्विपार्श्वजनक फलन

एच० सी० अग्रवाल तथा ए० के० अग्रवाल
गणित विभाग, बुन्देलखंड स्नातकोत्तर विद्यालय, झाँसी (उ० प्र०)

[प्राप्त—अक्टूबर 27, 1988]

सारांश

इस टिप्पणी में लेखकों ने कतिपय जनक फलन व्युत्पन्न किये हैं जिनमें लागेर तथा जैकोबी बहुपदियों के अतिरिक्त लारिसेला हाइपरज्यामितीय फलन भी निहित हैं। कतिपय विशिष्ट दशाओं पर भी विचार किया गया है।

Abstract

Some bilateral generating functions involving Lauricella functions. *By* H. C. Agrawal and A. K. Agrawal, Department of Mathematics, Bundelkhand Postgraduate College, Jhansi, U. P.

In this note the authors derive certain generating functions, which besides involving Leguerre and Jacobi polynomials also involve Lauricella hypergeometric functions. Towards the end of the paper some special cases are also discussed.

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित द्विपार्श्व जनक फलनों को व्युत्पन्न करना चाहेंगे :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)\, \Psi_2^{(r)} [\lambda+n;a_1,\ldots,a_r;x_1,\ldots x_r]$$

$$=(1-t)^{-\lambda}\Psi_2^{(r+1)}[\lambda:a_1,\ldots,a_r,1+\alpha;x_1/(1-t),\ldots,x_r/(1-t), -xt/(1-t)], \qquad (1.1)$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)\, \phi_2^{(r)}[a_1,\ldots,a_r;1+\alpha+n:x_1,\ldots,x_r]$$

$$=(1-t)^{-\lambda}\phi_2^{(r+1)}[a_1,\ldots,a_r,\lambda;1+\alpha:x_1,\ldots,x_r, -xt/(1-t)], \quad (1.2)$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n} t^n P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\; F_A^{(r)}[\lambda+n;a_1,\ldots,a_r;b_1,\ldots,br;x_1,\ldots,x_r]$$

$$=w^{-\lambda}F_A^{(r+1)}[\lambda:a_1,\ldots,a_r, -\beta; b_1,\ldots,b_r, -\alpha-\beta;x_1/w,\ldots x_r/w, t/w], \quad (1.3)$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n} t^n P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\; F_c^{(r)}\left[\tfrac{1}{2}(\lambda+n), \tfrac{1}{2}(\lambda+n+1):a_1,\ldots,ar; x_1^2,\ldots,x_r^2\right]$$

$$=\mu^{-\lambda}F_A^{(r+1)}\lambda:a_1-\tfrac{1}{2},\ldots,a_r+\tfrac{1}{2}. -\beta;2a_1-1,\ldots,2a_r-1, -\alpha-\beta; 2x_1|\mu,\ldots,2x_r/\mu,t/\mu], \quad (1.4)$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \binom{m+n}{n} t^n P_{m+n}^{(\alpha-n,\beta-n)}(x\;\; F_A^{(r)}[-n:a_1;\ldots a_r:b_1;\ldots,b_r:x_1\ldots,x_r]$$

$$=\left(\frac{1+x}{2}\right)^m\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\alpha} \rho^{\alpha+\beta+m}\, \frac{(1+\alpha+\beta+m)_m}{m!}\, F_A^{(r+1)}[-\alpha-\beta-m:a_1,\ldots,a_r,$$

$$-\alpha-m;b_1,\ldots,b_r,-\alpha-\beta-2m;x_1t(x-1)/2\rho,\ldots,x_rt(x-1)/2\rho,2/\rho(1+x)]; \quad (1.5)$$

जहाँ

$$w=1+\tfrac{1}{2}(1+x)\,t,\; \mu=1+x_1+\ldots x_r+\tfrac{1}{2}(1+x)t$$

तथा

$$\rho=1+\tfrac{1}{2}(x-1)\,t.$$

$\Psi_2^{(r)}, \phi_2^{(r)}, F_A^{(r)}, F_C^{(r)}$ तथा $F_D^{(r)}$ फलनों की परिभाषा के लिए निर्देश[2] को देखें। $L_K^{L(\alpha)}(x)$ तथा $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ क्रमशः लागेर जैकोबी बहुपद हैं[6]।

अपने विश्लेषण में हमें निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता होगी[6,4,2,3]

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(1+a)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)=(1-t)^{-\lambda}\,{}_1F_1[\lambda:1+\alpha:-xt/1-t)], \quad (1.6)$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n} t^n P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)=w^{-\lambda}{}_2F_1[\lambda, -\beta;-\alpha-\beta;t/w], \tag{1.7}$$

$$F_G^{(r)}\left[a/2, (1+a)/2; a_1,\ldots,a_r; x_1^2,\ldots,x_r^2\right]=(1+x_1+\ldots+x_r)^{-a}$$

$$\times F_A^{(r)}\left[a:a_1-\tfrac{1}{2},\ldots,a_r-\tfrac{1}{2};2a_1-1,\ldots, 2a_r-1; \frac{2x_1}{1+x_1+\ldots x_r},\ldots,\frac{2x_r}{1+x_1+\ldots+x_r}\right], \tag{1.8}$$

तथा

$$\sum_{n\geqslant 0} \binom{m+n}{m} t^n P_{m+n}^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)= \frac{(1+\alpha+\beta+m)_m}{m!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^m\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\alpha}\rho^{\alpha+\beta+m}$$

$$\times {}_2F_1[-\alpha-\beta-m, -\alpha-m;-\alpha-\beta-2m;2/\rho(x+1)]. \tag{1.9}$$

हम केवल (1.1) की उपत्ति देंगे, अन्यों को इसी तरह सिद्ध किया जा सकता है।

2. (1.1) की उपपत्ति

निम्नलिखित पर विचार करें :

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)\, \Psi_2^{(r)}[\lambda+n:a_1,\ldots,a_r;x_1,\ldots,x_r]$$

$$= \sum_{m_1,\cdots,m_r\geqslant 0} \frac{(\lambda)_{m_1+\cdots+m_r}}{(a_1)_{m_1}\cdots(a_r)_{m_r}} \frac{x_1^{m_1}\cdots x_r^{m_r}}{m_1!\ldots m_r!} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(\lambda+m_1+\ldots+m_r)_n}{(1+\alpha)_n} t^n L_n^{(\alpha)}(x)$$

अब (1.6) का सम्प्रयोग करने पर

$$=(1-t)^{-\lambda} \sum_{m_1,\ldots m_r\geqslant 0} \frac{(\lambda)_{m_1+\cdots+m_r}}{(a)_{m_1}\cdots(a_r)_{m_r}} \frac{\{x_1/(1-t)\}^{m_1}\ldots\{x_r/(1-t)\}^{m_r}}{m_1!\ldots m_r!}$$

$$\times {}_1F_1[\lambda+m_1+\ldots+m_r;1+\alpha; -xt/(1-t)],$$

मिलता है जो थोड़े सरलीकरण के बाद (1.1) प्रदान करता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

(I) (1.1) में माना $\lambda=a$, $1+\alpha=c'$ $t=x$, $x=y$ तथा $x_1=x_2=\ldots x_r=0$, तो हमें

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(a)^n L_n^{(c'-1)}(y)}{(c')_n} x^n=(1-x)^{-a}\,{}_1F_1[a;c';xy/(x-1)]. \tag{3.1}$$

प्राप्त होता है जो देशपाण्डे का परिणाम है[1]।

आगे (1.1) में $\lambda=1+\beta-n,\ t=z,\ r=1,\ a_1=1+\beta-n$ तथा $x_1=-y$ रखने पर

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(1+a)_n} z^n L_n^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\beta-n)}(y)=\exp.(y)\,(1-z)^{-1-\beta+n}$$

$$\times\ \Psi_2[1+\beta-n{:}1+\beta-n,\ 1+\alpha;\ -y/(1-z),\ -xz/(1-z)]. \tag{3.2}$$

रंगराजन ने [7, (13)] भी सिद्ध किया है कि

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(1+a)_n} z^n L_n^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\beta-n)}(y)=\exp.(-yz)\,(1+z)^{\beta}$$

$$\times\ \phi_3[-\beta;\ 1+\alpha{:}xz/(1+z),\ xyz], \tag{3.3}$$

जहाँ

$$\phi_3[\beta;\gamma{:}x,y]=\sum_{m,n\geq 0} \frac{(\beta)_m x^m y^n}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!}\ .$$

अतः (3.2) तथा (3.3) से Ψ_2 तथा ϕ_3 के मध्य निम्नलिखित रोचक रूपान्तर प्राप्त होता है

$$\Psi_2[1+\beta-n{:}1+\beta-n,\ 1+\alpha;\ -y/(1-z),\ -xz/(1-z)]$$

$$=\exp.(-y(z+1))\,(1+z)^{\beta}\,(1-z)^{1+\beta-n}\,\phi_3[-\beta;\ 1+\alpha{:}xz/(1+z),\ xyz]. \tag{3.4}$$

इसके बाद यदि हम (1.1) में $r=1$ लें तथा कुमर का रूपान्तर[6] प्रयोग करें तो हमें एक अन्य ज्ञात परिणाम प्राप्त होगा जो मनोचा [5, (14)] का है। इसे ही बाद में श्रीवास्तव तथा सिंघल ने भी [8, (34)] व्युत्पन्न किया है।

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(m+n!)}{(\lambda+1)_n} L_{m+n}^{(\alpha)}(x)\, L_n^{(\lambda)}(y)\, t^n=\exp.(x)\,(1+\alpha)_m\,(1-t)^{-1-\alpha-m}$$

$$\times\ \Psi^{(2)}[1+\alpha+m{:}1+\alpha,\ 1+\lambda;\ x/(t-1),\ yt/(t-1)]. \tag{3.5}$$

(II) (1.3) में $\alpha=b-c,\ \beta=-b,\ \lambda=a,\ x=y,\ t=-x$ तथा $x_1=\ldots=x_r=0$ लें जिससे

$$\sum_{n\geq 6} \frac{(a)_n\,(-x)^n}{(c)_n} P_n^{(b-c-n,\ b-n)}(y)$$

$$=(1-x)^{-a} F_2[a{:}b,b';c,b';-x/(1-x),\ -x(1-y)/2(1-x)], \tag{3.6}$$

प्राप्त हो जो देशपाण्डे के शोधपत्र[1] का अन्य परिणाम है।

यदि हम (1.5)में $a=\gamma$, $a_2=\gamma'$, $b_1=\delta$, $b_2=\delta'$, $x_1=y$, $x_2=z$ तथा $x_3=\ldots=x_r=0$ लिखें तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है जो मनोचा[4] का परिणाम है ।

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n} t^n P_n^{(\alpha-n,\ \beta-n)}(x)\ F_2[\lambda+n:\gamma,\gamma';\delta,\delta';y,z]=[1-\tfrac{1}{2}t(1-x)]^{-\lambda}$$

$$\times F_3[\lambda: \gamma, \gamma', -\alpha; \delta, \delta', -\alpha-\beta; y/(1-\tfrac{1}{2}(1-x)t),\ z/(1-\tfrac{1}{2}(1-x)t,\ -t/(1-\tfrac{1}{2}(1-x)t)]. \tag{3.7}$$

(III) यदि हम (1.5) में $\alpha=\lambda$, $\beta=\mu$; $x=y$, $x_1=x$, $x_2=2$ तथा $x_3=\ldots=x_r=0$ लिखें तो थोड़े से सरलीकरण के बाद हमें

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(m+n)!}{(-\alpha-\beta)_n} t^n P^{(\alpha-n,\ \beta-n)}(x)\ P_{m+n}^{(\lambda-n,\ \mu-n)}(y)=(1+\lambda+\mu+m)_m \left[1+\frac{t}{4}(y-1)\right]^{\lambda+\mu+m}$$

$$\times \left(\frac{1+y}{2}\right)^m \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{-\lambda} F_A[-\lambda-\mu-m:-\alpha,a_2,-\lambda-m;-\alpha-\beta,\ a_2,-\lambda-\mu-2m;$$

$$xt(y-1)/4\rho,\ t(y-1)/2\rho,\ 2/\rho(1+y)]. \tag{3.8}$$

प्राप्त होता है ।

(3.8) को निम्नलिखित परिणाम का विस्तार माना जा सकता है जिसे मनोचा तथा शर्मा ने[3] स्थापित किया है ($m=0$ रखें तथा प्राचलों को संमजित कर लें ।)

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(-\lambda-\mu)_n} t^n P_n^{(\alpha-n,\ \beta-n)}(x)\ P_n^{(\lambda-n,\mu-n)}(y)=\left[1-\frac{1}{4}\{(x+1)\ (y+1)\}\ t\right]^{\alpha}$$

$$\times \left[1-\frac{1}{4}\{(x-1)\ (y+1)\}\ t\right]^{\beta} F_1[-\mu;\ -\alpha,\ -\beta;\ -\lambda-\mu;\ 2(x+1)t/\{(x+1)$$

$$(y+1)\ t-4\},\ 1(x-1)t/\{(x-1)\ (y+1)t-4\}]. \tag{3.9}$$

अन्त में (1.5) में $x=1$ तथा $x=0$ रखने से निम्नलिखित रोचक सूत्र प्राप्त होता है—

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(1+\alpha-n)_n\ t^n}{n!} F_A^{(r)}[-r:a_1\ldots,a_r;b_1,\ldots b_r;x_1\ldots,x_r]$$

$$=((x-1)/(x+1))^{-\alpha}\,[1+\tfrac{1}{2}(x-1)t]^{\alpha+\beta}\,F_A^{(r+1)}[-\alpha-\beta:a_1,\ldots a_r,\ -\alpha;\ b_1,\ldots,b_r,$$

$$-\alpha-\beta;x_1t(x-1)/2\rho,\ldots,x_rt(x-1)/2\rho,\ 2/\rho(1+x)]. \tag{3.10}$$

निर्देश

1. देशपाण्डेय, वी० एल० तथा भिसे, वी० एम०, Math. Bechnk, 1970, 7(**22**), 169-172.

2. एक्सटन, एच०; 'Multiple Hygergeometric Functions and Applications', Ellis Harwood Limited England (London), 1976.

3. मनोचा, एच० एल० तथा शर्मा, बी० एल०, Proc. Camb. Phil. Soc. 1966, **62**, 459-462.

4. मनोचा, एच० एल०, वही, 1967, **63**; 457-459.

5. वही, Pub. Inst. Math. Beograd, 1969, **9**(**23**), 225-234.

6. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, Chelsea Pub. Com. New York, 1960.

7. रंगराजन, एस० के०; Proc. Ind. Acad. Sci., 1964, **60**, 153-158.

8. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा सिंघल, जे० पी०, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 1972, **20**, 355-363.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

A-फलनों के समाकल

राजपाल सिंह, मुकेश सिंहल तथा योगेन्द्र कुमार शर्मा
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—दिसम्बर 6, 1988]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में चार समाकलों का मान निकाला गया है जिन्हें प्रमेयों के रूप में दिया गया है। समाकल्य में A-फलन होने से ये समाकल अत्यन्त सामान्य तथा ज्ञात फलनों को प्राप्त करने के लिए मूलभूत हैं। रोचक विशिष्ट दशाएँ भी दी गई हैं।

Abstract

On integrals of A-functions. *By* Rajpal Singh, Mukesh Singhal and Yogendra Kumar Sharma, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In the present paper we have evaluated four integrals given in the form of theorems. These integrals by virtue of the A-function in the integrand, form the basis of obtaining most general and known integrals. Interesting special cases are also recorded.

1. प्रस्तावना

गौतम तथा गोयल ने[3] एन नवीन सामान्य आबीजीय फलन की परिभाषा निम्नलिखित रूप में दी है

$$A_{p,q}^{m,n}\left[x \left| \begin{matrix} ((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q)) \end{matrix} \right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(s) x^s \, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

(i)
$$f(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + s\alpha_j) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - b_j - s\beta_j)}{\prod_{j=m+1}^{p} \Gamma(1 - a_j - s\alpha_j) \prod_{j=n+1}^{q} \Gamma(b_j + s\beta_j)} \tag{1.2}$$

(ii) m, n, p तथा q अनृण संख्याएँ हैं जिसमें $m \leqslant p, n \leqslant q$.

(iii) $x \neq 0$ तथा प्राचल a_j, α_j, b_k एवं $\beta_k (j=1$ से p तथा $k=1$ से $q)$ सभी संम्मिश्र है।

(1.1) के दाएँ पक्ष का समाकल पूर्णतया अभिसारी होता है यदि

(I) $x \neq 0, k=0, h>0, |arg\ (ux)| < \frac{\pi h}{2}$ (1.3)

(II) $x>0, k=0=h, (v-\sigma w)<-1$ (1.4)

जहाँ

$$k=Im(\sum_1^p \alpha_j - \sum_1^q \beta_j)$$

$$h=Re(\sum_1^m \alpha_j - \sum_{m+1}^p \alpha_j + \sum_1^n \beta_j - \sum_{n+1}^q \beta_j)$$

$$u=\prod_1^p \alpha_j^{\alpha_j} \prod_1^q \beta_j^{-\beta_j}$$

$$v=Re(\sum_1^p a_j - \sum_1^q b_j) - 1/2(p-q)$$

$$w=Re(\sum_1^q \beta_j - \sum_1^p \alpha_j)$$

तथा $s=\sigma+it$ पथ I पर है जब $|t| \to \infty$.

अपरंच, श्रेणी के रूप में यह A-फलन निम्नवत् है

$$A_{p,q}^{m,n}\left[x \left|\begin{matrix}((a_p, \alpha_p)) \\ ((b_q, \beta_q))\end{matrix}\right.\right] = \sum_{k=1}^n \sum_{h=0}^\infty \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(a_j+\alpha_j w) \prod_{\substack{j=1 \\ \neq k}}^n \Gamma(1-b_j-\beta_j w)\ (-)^h\ x^w}{\prod_{j=m+1}^p \Gamma(1-a_j-\alpha_j w) \prod_{j=n+1}^q \Gamma(b_j+\beta_j w)\ h!\ (\beta_k)} \quad (1.5)$$

जहाँ

$$w=\left(\frac{1-b_k+h}{\beta_k}\right)$$

2. ज्ञात परिणाम

अनुभाग 3 में आये प्रमेयों की उपपत्तियों में निम्नलिखित ज्ञात परिणामों का उपयोग किया जावेगा।

(i) $\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{d-1}[ax+b(1-x)]^{-c-d} e^{-zax/[ax+b(1-x)]}.$

$$_2F_1\left[\alpha, \beta;\ c;\ \frac{dx}{ax+b(1-x)}\right]dx$$

$$=e^{-z}\frac{\Gamma(c)\Gamma(d)\Gamma(c+d-\alpha-\beta)}{(a)^c(b)^d\Gamma(c+d-\alpha)\Gamma(c+d-\beta)}\ {}_2F_2[d,\ c+d-\alpha-\beta; c+d-\alpha,\ c+d-\beta;\ z] \quad (2.1)$$

जहाँ

$Re(c)>0,\ Re(d)>0,\ Re(c+d-\alpha-\beta)>0,\ a$ तथा b अशून्य पूर्णांक हैं तथा $[ax+b(1-x)]\neq 0$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$.

(ii) $\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{c-1}[ax+b(1-x)]^{-2c}\ {}_2F_1\left[\alpha, \beta;\ \frac{\alpha+\beta+1}{2};\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]dx$

$$=\frac{\pi\Gamma(c)\Gamma(1/2+\alpha/2+\beta/2)\Gamma(1/2-\alpha/2-\beta/2+c)}{2^{2c-1}(ab)^c\ \Gamma(1/2+\alpha/2)\Gamma(1/2+\beta/2)\Gamma(1/2-\alpha/2+c)\Gamma(1/2-\beta/2+c)} \quad (2.2)$$

जहाँ

$Re(c)>0,\ Re(1/2+\alpha/2+\beta/2)>0,\ Re(1/2-\alpha/2-\beta/2+c)>0,\ a$ तथा b अशून्य पूर्णांक हैं एवं $[ax+b(1-x)]\neq 0$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$.

(iii) $\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{c-d}[ax+b(1-x)]^{-2c+d-1}\ {}_2F_1\left[\alpha,\ 1-\alpha;\ d;\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]dx$

$$=\frac{\pi(2)^{1-2c}\ \Gamma(c)\ \Gamma(d)\ \Gamma(c-d+1)}{(a)^c\ (b)^{c-d+1}\ \Gamma(\alpha/2+d/2)\ \Gamma(c+\alpha/2-d/2+1/2)\Gamma(1/2-\alpha/2+d/2)\Gamma(1+c-\alpha/2-d/2)} \quad (2.3)$$

जहाँ

$Re(c)>0,\ (Re(c-d+1)>0,\ Re(d)>0,\ a$ तथा b अशून्य पूर्णांक हैं तथा $[ax+b(1-x)]\neq 0$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$.

(iv) $$\int_0^\infty x^{s-1}\ e^{x/2}\ W_{k,u}(x)dx=\frac{\Gamma(u+s+1/2)\ \Gamma(1/2-u+s)\Gamma(-k-s)}{\Gamma(u-k+1/2)\ \Gamma(1/2-u-k)} \quad (2.4)$$

जहाँ

$$|Re\ u|-1/2<Re(s)<-Re\ k.$$

3. दो A-फलनों के गुणनफल वाले समाकल

प्रमेय I

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{d-1}[ax+b(1-x)]^{-c-d}\ {}_2F_1\left[\alpha,\beta;c:\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]\exp\left[\frac{-zax}{ax+b(1-x)}\right].$$

$$A_{p,q}^{m,n}\left[y\left(\frac{b(1-x)}{ax+b(1-x)}\right)^{v}\middle|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q))\end{matrix}\right]\ A_{P,Q}^{M,N}\left[y_1\left(\frac{b(1-x)}{ax+b(1-x)}\right)^{\lambda}\middle|\begin{matrix}((A_p,E_p))\\((B_Q,F_Q))\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{e^{-z}\Gamma(c)}{(a)^c(b)^d}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{N}\Gamma(1-B_j-F_jw)(-)^h y_1^{w} z^r}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_j+F_jw)\, h!\, r!\,(F_k)}$$

$$A_{p+2,\ q+2}^{m+2,n}\left[y\ \middle|\ \begin{matrix}(d+\lambda w+r,v),\ (c+d+r+\lambda w-\alpha-\beta,v)\ ((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q),\ (c+d+r+\lambda w-\alpha,v)\ (c+d+r+\lambda w-\beta,v)\end{matrix}\right] \qquad (3.1)$$

जहाँ

$$w=\left(\frac{1-B_k+h}{F_k}\right),\ v,\ \lambda>0,\ Re(c)>0,\ Re(d)>0,$$

$Re(c+d-\alpha-\beta)>0, a$ तथा b अशून्य पूर्णांक हैं और $[ax+b(1-x)]\neq 0$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ तथा (3.1) के दाएँ तथा बाएँ पक्षों में आने वाला A-फलन वैश्लेषिक रीति से प्रतिबन्धों की तुष्टि करता है।

उपपत्ति

(3.1) को सिद्ध करने के लिए बाएँ पक्ष में (1.1) तथा (1.5) परिणामों का व्यवहार करने तथा समाकलन एवं संकलन का क्रम बदलने पर निम्नलिखित की प्राप्ति होती है।

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{=}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{\substack{j-1\\ \neq k}}^{N}\Gamma(1-B_j-F_jw)(-)^h(y_1b^{\lambda})^w}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_f+F_jw)\, h!\,(F_j)}\frac{1}{2\pi i}\int_L\phi(s)\,(yb^{v})^{s}.$$

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{d+sv+\lambda w-1}[ax+b(1-x)]^{-c-d-sv-\lambda w}\ {}_2F_1\left[\alpha,\beta;c;\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right].$$

$$\exp\left[\frac{-zax}{ax+b(1-x)}\right]dx\, ds.$$

अब (2.1) के सम्प्रयोग से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करते हैं, ${}_2F_2$ के लिए श्रेणी लिखते हैं, (1.1) की सहायता से परिणाम की विवेचना करते हैं तो तुरन्त ही दायाँ पक्ष निकलता है।

प्रमेय II

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{c-1}[ax+b(1-x)]^{-2c}\,{}_2F_1\left[\alpha,\beta;\ \frac{\alpha+\beta+1}{2};\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right].$$

$$A_{p,q}^{m,n}\left[y\left(\frac{abx(1-x)}{[ax+b(1-x)]^2}\right)^v\Big|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q))\end{matrix}\right]A_{P,Q}^{M,N}\left[z\left(\frac{abx(1-x)}{[ax+b(1-x)]^2}\right)^u\Big|\begin{matrix}((A_P,E_P))\\((B_Q,F_Q))\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2\pi\Gamma(1/2+\alpha/2+\beta/2)}{(4ab)^c\Gamma(1/2+\alpha)\Gamma(1/2+\beta/2)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-B_j-F_jw)(-)^n(4^vz)^w}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_j+F_jw)h!\,F_k}$$

$$A_{p+2,q+2}^{m+2,n}\left[4^vy\Big|\begin{matrix}(c+4w,v);(1/2-\alpha/2-\beta/2+c+4w,v);((a_p,\alpha_p))\\((b_p,\beta_q));(1/2-\alpha/2+c+uw,v);(1/2-\beta/2+c+uw,v)\end{matrix}\right]\qquad(3.2)$$

जहाँ

$$w\left(\frac{1-B_k+h}{F_k}\right),\ u>0,\ v>0,\ Re(c)>0,\ Re(1/2+\alpha/2+\beta/2)>0,$$

$Re(1/2-\alpha/2-\beta/2+c)>0$, a तथा b अशून्य पूर्णांक हैं तथा गुणांक $[ax+b(1-x)]\neq0$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant1$ तथा (3.2) के दाएँ तथा बाएँ पक्षों में आने वाला A-फलन वैश्लेषिक रीति से प्रतिबन्धों की तुष्टि करता है।

प्रमेय III

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{c-d}[ax+b(1-x)]^{-2c+d-1}\,{}_2F_1\left[\alpha,1-\alpha;d;\ \frac{ax}{ax+b(1-x)}\right].$$

$$A_{p,q}^{m,n}\left[E\left(\frac{abx(1-x)}{[ax+b(1-x)]^2}\right)^v\Big|\begin{matrix}((a_p,\alpha_p))\\((b_q,\beta_q))\end{matrix}\right]A_{P,Q}^{M,N}\left[z\left(\frac{abx(1-x)}{[ax+b(1-x)]^2}\right)^v\Big|\begin{matrix}((A_P,E_P))\\((B_Q,F_Q))\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{2\pi\Gamma(d)}{(4ab)^c(b)^{1-d}\Gamma(\alpha/2+d/2)\Gamma(1/2-\alpha/2+d/2)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{\infty}.$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{N}\Gamma(1-B_j-F_j)(-)^k}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_j+F_jw)h!(F_k)}\left(\frac{z}{4u}\right)^w A_{p+2,q+2}^{m+2,n}$$

$$\left[\frac{y}{4^v}\left|\begin{matrix}(c+uw,\ v);(c+uw-d+1,\ v);\ ((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q));\ (1/2+c+uw+a/2-d/2,v);(1+c+uw-a/2-d/2,\ v)\end{matrix}\right.\right] \tag{3.3}$$

जहाँ

$$w=\left(\frac{1-B_k+h}{F_k}\right),\ u>0,\ v>0,\ Re(c)>0,\ Re(c-d+1)>0,\ Re(d)>0,$$

a तथा b अशून्य पूर्णांक हैं तथा $[ax+b(1-x)]\neq 0$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ तथा (3.3) के दाएँ तथा बाएँ पक्षों में आने वाले A-फलन से प्रतिबन्धों की तुष्टि वैश्लेषिक रीति से होती है ।

प्रमेय IV

$$\int_0^\infty x^{s-1}\, e^{x/2}\, W_{r,u}(x)\, A^{m,n}_{p,q}\left[yx^\lambda\left|\begin{matrix}((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q))\end{matrix}\right.\right] A^{M,N}_{P,Q}\left[zx^v\left|\begin{matrix}((A_P,\ E_P))\\((B_Q,\ F_Q))\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{1}{\Gamma(u-r+1/2)\Gamma(1/2-u-r)}\sum_{k=1}^{N}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{M}\Gamma(A_j+E_jw)\prod_{\substack{j=1\\ \neq k}}^{N}\Gamma(1-B_j-F_jw)(-)^h z^w}{\prod_{j=M+1}^{P}\Gamma(1-A_j-E_jw)\prod_{j=N+1}^{Q}\Gamma(B_j+F_jw)\,h!F_k}$$

$$A^{m+2,\ n+1}_{p+2,\ q+1}\left[y\left|\begin{matrix}(u+s+vw+1/2,\ \lambda);\ (1/2-u+s+vw,\ \lambda),\ ((a_p,\ \alpha_p))\\(1+r+s+vw,\ \lambda);\ ((b_q,\ \beta_q))\end{matrix}\right.\right] \tag{3.4}$$

जहाँ

$$w=\left(\frac{1-B_k+h}{F_k}\right),\ \lambda>0,\ v>0,\ |Re\ u|-1/2<Re(s)<-Re(r)$$

तथा (3.4) के दाएँ तथा बाएँ पक्षों में आने वाले A-फलन से प्रतिबन्ध की तुष्टि हो जाती है ।

उपपत्ति

प्रमेय I की ही तरह प्रमेय II, III तथा IV की उपपत्ति विकसित की जा सकती है । हाँ, (3.2) (3.3) तथा (3.4) का दायाँ पक्ष प्राप्त करने के लिए (2.1) के स्थान पर क्रमशः (2.2), (2.3) तथा (2.4) का प्रयोग किया जावेगा ।

विशिष्ट दशाएँ

प्रमेय I की विशिष्ट दशाएँ प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित विधि अपनाई गई है जिसका प्रयोग अन्य प्रमेयों के साथ किया जा सकता है—

(i) यदि α_p, β_q, E_P तथा F_P सभी वास्तविक धनात्मक हैं, पथ A-फलन फाक्स के H-फलन में[2] निम्नलिखित प्रकार से समानीत हो जाता है ।

$$A_{p,q}^{n,m}\left[x\ \middle|\begin{matrix}((1-a_p,\ \alpha_p))\\((1-b_q,\ \beta_q))\end{matrix}\right]=H_{p,q}^{m,n}\left[x\ \middle|\begin{matrix}((a_p,\ \alpha_p))\\((b_q,\ \beta_q))\end{matrix}\right]$$

परिणाम हमें दो H-फलन के गुणनफल के रूप में प्राप्त होता है ।

(ii) यदि उपर्युक्त प्रतिस्थापनों के अतिरिक्त हम $\alpha_p, \beta_q, E_P, F_P, \nu=1$, रखें तो यह G-फलन के परिणाम में समानीत हो जाता है ।

(iii) एर्डेल्यी की पुस्तक[1] में दिये गये G-फलन की विविध विशिष्ट दशाओं का उपयोग करते हुए हम अनेक सरलतर विशिष्ट फलनों वाले तमाम समाकल प्राप्त कर सकते हैं ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० Higher Transcendental Functions. Vol. I, Mc Graw-Hill 1953.

2. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc. 1961, **98**, 393-429.

3. गौतम, जी० पी० तथा गोयल, ए० एन०, Ind. J. Pure and Appl. Math. 1981, **12** 1094-1105.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33. No. 2, 1990

प्रत्यावर्ती धारा नीरव-विद्युत् विसर्जन में काँच पृष्ठ के समीप वैद्युत द्विस्तर का निर्माण

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कालिज, मेरठ

[प्राप्त–दिसम्बर 1, 1989]

सारांश

विगैसित तथा अविगैसित निकायों में पारद वाष्प तथा निऑन के स्लीव उत्तेजन द्वारा जोशी प्रभाव $\pm\%\Delta i$ पर, 25° से 250°C तक ताप के प्रभाव का अध्ययन किया गया। अविगैसित स्लीव नलियों में, $-\%\Delta i$ 75°C तक बढ़ता हुआ पाया गया। विगैसित नलियों में $+\%\Delta i$ ताप के साथ क्रमशः बढ़ता हुआ पाया गया। 150°C से ऊपर $-\Delta i$ प्रेक्षित नहीं हुआ। इनकी व्याख्या प्रस्तावित वैद्युत द्विस्तर सिद्धान्त के आधार पर की गई है।

ABSTRACT

Formation of electrical double layer near glass surface in a. c. silent electric discharge. *By* Jagdish Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Influence of temperature from 25°C to 250°C on the Joshi effect $\pm\%\Delta i$ in mercury vapour and neon with degassed systems under sleeve excitation has been studied. In non-degassed sleeve tubes, $-\%\Delta i$ has been found to increase upto 75°C and decrease afterwards. In degassed sleeve tubes, $+\%\Delta i$ has been observed to increase regularly with temperature. No $-\Delta i$ has been observed above 150°C. These have been explained on the basis of the proposed theory of the 'electrical double layer.'

जोशी प्रभाव $\pm\Delta i$ के लिए भौतिक सिद्धान्त[1] में जोशी ने विसर्जन के दौरान, आयनों, इलेक्ट्रॉनों, तथा उत्तेजित कणों से बने एक अधिशोषण-सदृश सीमांत या इलेक्ट्रोड-तल की परिकल्पना की

है। निकाय के ताप की वृद्धि इलेक्ट्रोड-तल को विकृत कर सकती है। अतः अविगैसित निकायों में पारद वाष्प तथा निऑन के नियत द्रव्यमान की अवस्थाओं में अन्वेषण किया गया।

प्रयोगात्मक

पुनरासुत पारद को रखने के लिए बनी पार्श्व बल्बयुक्त, सिग्कोल S75 काँच की 15 सेमी० लम्बी नली (स्लीव-अंतराल=60 मिमी) को काँच समुदाय के साथ जोड़ दिया गया। द्विमंच लेबोल्ड पंप से इसका निर्वातन किया गया। वैद्युत तापित कक्ष में नली को परिबद्ध करके, 25° से 250°C तक के विविध तापों पर इसके $(V-i)_{D,\,L}$ अभिलक्षणों का आलेखन किया गया। तत्पश्चात्, विसर्जन नली का 400°C पर विगैसन करके, पारद को आसवन द्वारा उड़ा दिया गया। विगैसित नली के साथ ताप के अध्ययन को दोहराया गया।

स्पेक्ट्रम-शुद्ध निऑन को द्रव वायु ट्रैप में गुज़ार कर पूर्व प्रकाशित विधि[2] द्वारा विगैसित नली में प्रविष्ट किया गया। $pNe=3.7$ मिली, 25°C पर इसको मुंहबन्द करके, ताप के अध्ययन को उपर्युक्त स्लीव-अंतराल पर दोहराया गया।

परिणाम तथा विवेचना

अविगैसित दशा में, 75°C तक $+\%\Delta i$ तथा $-\%\Delta i$ दोनों बढ़ते हैं; तत्पश्चात्, केवल $+\%\Delta i$ बढ़ता है, जबकि पारद वाष्प तथा निऑनयुक्त विगैसित निकायों में $+\%\Delta i$ ताप के साथ क्रमशः बढ़ता जाता है। सभी दशाओं में, 150°C पर तथा इससे ऊपर केवल $+\Delta i$ का प्रेक्षण हुआ।

निऑन सदृश इलेक्ट्रॉन-युक्त गैस में जोशी प्रभाव के प्रेक्षण के लिए यह प्रस्ताव है कि प्रत्यावर्ती धारा विसर्जन में जिस समय तल क्षणिक ऐनोड का कार्य करता है, उस समय उस पर इलेक्ट्रॉनों का निक्षेपण हो जाता है। जब तल कैथोड बन जाता है तब, ये इलेक्ट्रॉन श्लथ बद्ध हो जाते हैं और बाह्य विकिरणों द्वारा सुगमतापूर्वक मुक्त हो जाते हैं। Δi के लिए जोशी सिद्धान्त [1] में परिकल्पित अधि-शोषण-सदृश सीमांत-तल के साथ यह अभिनिर्धारणीय है। जब इलेक्ट्रॉन विक्षेपित होते हैं और विकिरण से मुक्त होते हैं या उनका उदासीनीकरण होता है तब, वे धनात्मक आयन जिनका दुर्लभ गैस में सांद्रण पर्याप्त होता है, कैथोड की ओर गति करते हुए होते हैं। विभव के चिह्न में जल्दी-जल्दी परिवर्तन के कारण, तल पर एक द्विस्तर इस प्रकार बन जाता है कि उसके एक ओर धनात्मक आयन होते हैं। परावैद्युत से मित-स्थायियों तथा अन्य साधनों द्वारा मुक्त वे इलेक्ट्रान जिनके वेग मेक्सवेल रीति से वितरित होते हैं, उन्हें द्विस्तर के कर्षण को पार करना होता है। जो इस कर्षण को पार कर जाते हैं वे धारा प्रवाहन में सहयोग देते हैं। यह द्विस्तर कांच भित्तियों के श्रेणीक्रम में एक और धारिता का समावेश कर देता है और परिणामी को बदल देता है, जैसा कि प्रेक्षित धारा परिवर्तनों[3] से स्पष्ट होता है।

वर्द्धित प्रदीपन की तीव्रता के साथ, पृष्ठ से मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या तथा उनके वे भाग जिनकी गतियाँ द्विस्तर को पार करने में समर्थ हैं, बढ़ जाती हैं और फलस्वरूप $\pm\Delta i$ बढ़ जाता है, जिसकी संतृप्ति मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संतृप्ति होती है।

द्विस्तर उस विभव परिसर में बनता है जबकि $+\Delta i$ घटना आरंभ होती है, जिसका प्रभाव $-\Delta i$ को बढ़ाने का होता है। अनुप्रयुक्त विभव की वृद्धि के साथ द्विस्तर की मोटाई घट जाती है, जिसका कर्षण इलेक्ट्रॉनों पर बढ़ जाता है, फलतः $-\Delta i$ बढ़ जाता है।

उस विभव परिसर में जहाँ $-\Delta i$ घटता है, द्विस्तर का निपात हो जाता है, किन्तु, तत्क्षण पुनः बढ़ जाता है और दिष्ट धारा विभवों के साथ इस नवीनीकरण की बढ़ती हुई आवृत्ति इतनी अचर होती है कि Δi का परिमाण कम हो जाता है और $\pm\Delta i$ के स्थायीकरण के लिए कालप्रभावन का अधिक समय लगता है।

$+\Delta i$ पर ताप का प्रभाव[4] होता है : (क) वर्द्धित इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के लिए अधिशोषण-तल का कार्य फलन घटाना ; (ख) विशोषण ; (ग) अंतराकाशी आवेश का क्षीणन तथा (घ) गैस माध्यम के पार विभव Vg को बढ़ाना। ताप वृद्धि के साथ काँच भित्तियों की धारिता बढ़ने[6] के कारण, (क) तथा (ख) कारकों की तुलना में मोहन्ती[4] का (घ) पर बल देना प्रसंभाव्य प्रतीत नहीं होता। (ग) को प्रभावी कारक मानना अधिक उपयुक्त प्रतीत होता है, जिसके परिणामस्वरूप $-\Delta i$ में ह्रास अतः इसके विपरीत अंग $+\Delta i$ में वृद्धि होती है। नीऑन में $\pm\Delta i$ के लिए उपर्युक्त प्रस्तावित द्विस्तर सिद्धान्त के आधार पर, ताप में वृद्धि के साथ द्विस्तर के दो तलों के मध्य की दूरी इतनी कम हो जाती है कि अंततोगत्वा यह एक तल के रूप में व्यवहार करने लगता है। पृष्ठ से निकली गैसों के साथ पृष्ठ पर संचित धनात्मक आयनों के विलय से यह सम्पन्न होता है। इस द्विस्तर की अनुपस्थिति इलेक्ट्रान को संबंधित इलेक्ट्रोड पर पहुँचने की बाधा को घटा देता है अतः $+\Delta i$ बढ़ जाता है। संपूर्ण विलय केवल उस ताप पर सम्पन्न होता है, जबकि विशोषण पर्याप्त होता है–जैसा कि 150°C पर प्रेक्षित हुआ। जब विशोषण तीव्रगामी होता है तब पृष्ठ की गैसों के स्थान पर इसकी निकटस्थ गैसें तल का कार्य करने लगती हैं और विकिरणन पर यह इलेक्ट्रॉनों का स्रोत बन जाता है। ये इलेक्ट्रॉन तात्क्षणिक ऐनोड पर पहुंचते हैं। इस प्रकार पृष्ठ धारा-प्रवाहन में सहयोग देता है, जिसमें $+\Delta i$ का प्रेक्षण होता है।

विगैसित तथा अविगैसित नलियों के ताप के साथ $-\Delta i$ के परिवर्तन के अंतर की व्याख्या अविगैसित निकाय में विद्यमान स्वाभाविक अधिशोषण-तल के आधार पर की जा सकती है। इस तल के अवयवों की पलायन की संभावना बहुत कम होती है, क्योंकि इस पर आविष्ट गैस का एक और तल बन जाता है। ताप की वृद्धि के कारण इस तल के परिणामस्वरूप यह सक्रियित कणों से समृद्ध हो जाता है। इसका परिणाम $+\Delta i$ तथा $-\Delta i$ दोनों की वृद्धि में होता है। विगैसित निकाय में, एक विशिष्ट ऊर्जा प्राप्त करने वाले कण इस तल से पलायन कर जाते हैं ; अतः जैसा कि प्रस्तुत अन्वेषण में प्रेक्षण हुआ है, ताप के साथ $-\Delta i$ क्रमशः घटता जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

श्री वी० सुब्रह्मन्यम् के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है ।

निर्देश

1. जोशी, एस० एस०, प्रोसी० इन्डियन साइंस काँग्रेस, अध्यक्षीय भाषण, रसायन विभाग, 1943, 51.
2. प्रसाद, जे०, ऐक्टा सिंएसिया इन्डिका, 1975, **1**, 273.
3. प्रसाद, जे०, जर्न० बुल० सोसा० किम० बिओग्राड, 1979, **44**(6), 461.
4. मोहन्ती, ए० आर०, जर्न० साइं० इंडस्ट० रिस०, 1954, **13B**, 467.
5. रिचर, जी०, फ़िज़० जैड०, 1940, **41**, 229.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

माइजर का G-फलन तथा राबिन प्रतिबन्ध के अन्तर्गत दण्ड में ऊष्मा चालन

एस० डी० बाजपेयी

गणित विभाग, बहरीन विश्वविद्यालय, इसा टाउन, बहरीन

तथा

साधना मिश्र

सिविल इंजीनियरी विभाग, विद्या भवन रूरल इंस्टीट्यूट, उदयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त–दिसम्बर 1, 1989]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम माइजर के G-फलन वाले दो फल समाकलों का मान निकालेंगे और उनका प्रयोग राबिन प्रतिबन्ध के अन्तर्गत दण्ड में ऊष्मा प्रवाह की समस्या को हल निकालने के लिए किया जावेगा।

Abstract

Meijer's G-function and heat conduction in a rod under Robin condition. *By* S. D. Bajpai, Department of Mathematics, Univerity of Bahrain, P. O. Box 32038, Isa Town, Bahrain and Sadhna Misra, Department of Civil Engineering, Vidya Bhawan Rural Institute, Udaipur (Raj.).

In this paper, we evaluate two integrals involving Meijer's G-function and employ them to obtain a solution of the problem of heat flow in a rod under Robin condition.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य माइजर के G-फलन वाले फलनों का मान ज्ञात करना तथा उनका उपयोग ऊष्मा चालन के लिए हल प्राप्त करना है जो राबिन प्रतिबन्ध या तृतीय प्रकार केसीमा प्रति-

बन्धों के अन्तर्गत समांग दण्ड में होता हो बशर्ते ऊष्मीय गुणांक स्थिर हों और ऊष्मीय ऊर्जा का कोई अन्य स्रोत न हो।

ऐसी स्थितियां जिनमें ठोसों द्वारा उष्मा उत्पन्न होती है उनके तकनीकी संप्रयोग महत्वपूर्ण बनते जा रहे हैं[11]। उष्मा कई प्रकार से उत्पन्न की जा सकती है—(1) विद्युतधारा प्रवाह से (2) परा-वैद्युत या उत्प्रेरण उष्मन (3) रेडियोऐक्टिव क्षय (4) विकिरण से अवशोषण (5) श्यान या प्लास्टिक प्रवाह में यांत्रिक उत्पादन (6) रासायनिक अभिक्रियाएँ।

बाजपेयी[1–10] तथा अन्य शोधकर्त्ताओं ने[14–15] सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों का उपयोग उष्मा चालन, दो गोलाकार चालकों के मध्य वैद्युतस्थैतिक क्षेत्र, विभवसिद्धान्त आदि से सम्बद्ध एक-विमीय सीमा के प्रमेयों के हल के लिए किया है।

उपपत्तियों में निम्नलिखित सूत्रों की आवश्यकता होगी।

समाकलों का निम्नलिखित परिवर्धित रूप [13, p. 372, (1) (8)]

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \sin\frac{\lambda_{m\pi} x}{L}\, dx$$

$$= \frac{L \sin\frac{\lambda_m \pi}{2}\, \Gamma(\omega)}{2^{w-1}\, \Gamma\left(\frac{\omega+\lambda_m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\omega-\lambda_m+1}{2}\right)}, \ \text{Re}w > 0. \tag{1.1}$$

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \frac{\cos \lambda_{m\pi} x}{L}\, dx$$

$$= \frac{L \cos\frac{\lambda_{m\pi}}{2} \Gamma(w)}{2^{w-1}\, \Gamma\left(\frac{w+\lambda_m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{w-\lambda_m+1}{2}\right)} \ \text{Re}w > 0 \tag{1.2}$$

निम्नलिखित लाम्बिक प्रणाली [11, p. 116,(9), तथा (10)]

$$\int_0^L \left[\cos \lambda_n x + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n x\right] \left[\cos \lambda_m x + \frac{h}{\lambda_m} \sin \lambda_m x\right] dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\lambda_n^2+h^2)L+2h}{2\lambda_n^2}, & (m=n); \\ 0, & (m \neq n); \end{cases} \tag{1.3}$$

जहाँ λ_n अबीजीय समीकरण के धनात्मक मूल हैं

$$\tan \lambda L = \frac{2h\lambda}{\lambda^2 - h^2} \,. \tag{1.4}$$

संक्षिप्तता की दृष्टि से इससे आगे $a_p\, a_1. \ldots, a_p$, के लिए, d धनात्मक पूर्णांक के लिए तथा संकेत $\Delta(d, w)$ प्राचलों के $\frac{w}{d}, \frac{w+1}{d}, \ldots, \frac{w+d-1}{d}$ सेट के लिए प्रयुक्त किया जावेगा।

2. समाकल

जिन समाकलों का मान ज्ञात किया जाना है, वे हैं

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \sin\frac{\lambda_{m\pi x}}{L}\; G_{p,q}^{u,v}\left(z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d} \Big|\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right)dx$$

$$= \frac{L\sin\frac{\lambda_m \pi}{2}}{\sqrt{((d\pi))}}\, G_{p+2d,q+2d}^{u,v+2d}\left(z\,\Big|\begin{matrix}\Delta(2d,\,1-w),\, a_b \\ b_q,\, \Delta\left(d, \frac{1-w-\lambda_m}{2}\right), \Delta\left(d, \frac{1-w+\lambda_m}{2}\right)\end{matrix}\right), \tag{2.1}$$

$$\int_0^L \left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} \cos\frac{\lambda_{m\pi x}}{L}\; G_{p,q}^{u,v}\left(z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d} \Big|\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right)dx$$

$$= \frac{L\cos\frac{\lambda_{m\pi}}{2}}{\sqrt{((d\pi))}}\, G_{p+2d,q+2d}^{u,v+2d}\left(z\,\Big|\begin{matrix}\Delta(2d,\,1-w),\, a_p \\ b_q,\, \Delta\left(d, \frac{1-w+\lambda_m}{2}\right), \Delta\left(d, \frac{1-w+\lambda_m}{2}\right)\end{matrix}\right), \tag{2.2}$$

जहां

$$2(u+v) > p+q, |\arg z| < (u+v-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi, \text{ Re } (w+2dbj) > 0,\; j=1, \ldots, u.$$

उपपत्ति : समाकल (2.1) को स्थापित करने के लिए समाकल्य में G-फलन को हम मेलिन-बार्निज प्रकार के समाकल [12, p. 207(1)] के रूप में व्यक्त करते हैं और समाकलों के क्रम को परस्पर बदल देते हैं जो इस प्रक्रम में आये समाकलों के परम अभिसरण होने के कारण वैध हो तो हमें

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{j=1}^{u}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{v}\Gamma(1-a_j+s)z^s}{\prod_{j=u+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=v+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}\int_C^L\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w+2s d-1}$$

$$\sin\frac{\lambda_m\pi x}{L}\,dx\,ds.$$

प्राप्त होता है। अब (1.1) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करने और गामा फलन [12, p. 4, (11)] के लिये गुणन सूत्र का प्रयोग करने पर प्राप्त करते हैं—

$$L\sin\lambda_m\pi/2(d\pi)^{-1/2}$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\prod_{j=1}^{u}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{v}\Gamma(1-a_j+s)\prod_{i=0}^{2d-1}\Gamma\left(\frac{w+i}{2d}+s\right)z^s}{\prod_{j=u+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=v+1}^{p}\Gamma(a_j-s)\prod_{i=0}^{d-1}\Gamma\left(\frac{(w+\lambda_m+1)/2+i}{d}+s\right)\prod_{i=0}^{d-1}\Gamma\left(\frac{(w-\lambda_m+1)/2+i}{d}+s\right)}ds.$$

अब [12, p. 207, (1)] का व्यवहार करने पर समाकल (2.1) प्राप्त होता है।

उपर्युक्त विधि को व्यवहृत करने तथा (1.1) के बदले (1.2) का प्रयोग करने पर समाकल (2.2) प्राप्त होता है।

3. तृतीय प्रकार के सीमा प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समांग दण्ड में उष्मा प्रवाह

हम समांग दण्ड में राविन प्रतिबन्ध के अन्तर्गत (शून्य ताप पर माध्यम के भीतर सिरों पर विकिरण) उष्मा संचालन की समस्या पर विचार करेंगे। यदि उष्मीय गुणांक स्थिर हो और उष्मीय ऊर्जा के कोई स्रोत न हों तो एकविमीय दण्ड $0\leqslant x\leqslant L$ में ताप $u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^3}. \tag{3.1}$$

तुष्टि करता है।

इस समीकरण के हल को प्रारम्भिक प्रतिबन्ध

$$u(x, 0)=f(x), \tag{3.2}$$

तथा निम्नलिखित सीमा प्रतिबन्धों की तुष्टि करना चाहिए

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)-hu(0, t)=0\ ; \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)+hu(L, t)=0\ ; h>0. \tag{3.4}$$

समीकरण (3.1) की तुष्टि निम्नलिखित व्यंजक द्वारा हो जाती है

$$e^{-k\lambda_n^2 t}[A \cos \lambda_n x+B \sin \lambda_n x]. \tag{3.5}$$

समीकरण (3.5) भी (3.3) एवं (3.4) की तुष्टि करता है, बशर्ते कि

$$\lambda_x B-hA=0, \text{ तथा} \tag{3.6}$$

$$\lambda_n[B \cos \lambda_n L-A \sin \lambda_n L]+h[A \cos \lambda_n L+B \sin \lambda_n L]=0. \tag{3.7}$$

(3.6) तथा (3.7) से हमें $A/B=\lambda_{n/n}$ तथा

$$\tan \lambda_n L=\frac{2\lambda_n h}{\lambda_n^2-h^2}\ , \tag{3.8}$$

प्राप्त होता है जहाँ λ_n (1.4) का nवाँ धनात्मक मूल है ।

तब हमारे प्रमेय का हल निम्नवत् होगा

$$u(x, t) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[\cos \lambda_n x+\frac{h}{\lambda_n}\sin \lambda_n x\right] e^{-k\lambda_n^2 t}. \tag{3.9}$$

4. प्रमेय का हल

हम निम्नलिखित पर विचार करें

$$u(x, 0)=\left(\sin \frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} G_{p,q}^{u,v}\left[z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d}\middle| \begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix} \right]. \tag{4.1}$$

जिस प्रमेय का हल प्राप्त करना है वह है

$$u(x,t)=\frac{2L}{\sqrt{((\pi d))}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^2_{n e}-k\lambda^2_n{}^t}{[(\lambda^2_n+h^2)L+2h)]} \tag{4.2}$$

$$\times\left\{\cos\frac{\lambda_n\pi}{2}\; G^{u,v+2d}_{p+2d,q+2d}\left[z\middle|\begin{matrix}\Delta(2d,\,1-w),\,a_p\\ b_q,\,\Delta\left(d,\frac{1-w-\lambda_n}{2}\right),\Delta\left(d,\frac{1-w+\lambda_n}{2}\right)\end{matrix}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{h}{\lambda_n}\left(\sin\frac{\lambda_n\pi}{2}\right)G^{v,v+2d}_{p+2d,q+2d}\left[z\middle|\begin{matrix}\Delta(2d,\,1w),\,a_p\\ b_q,\,\Delta\left(d,\frac{1-w-\lambda_n}{2}\right),\Delta\left(d,\frac{1-w+\lambda_n}{2}\right)\end{matrix}\right]\right\},$$

जहां

$2(u+v)>p+q.\ |\arg z|<(u+v-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi,$

$\text{Re}\,(w+2dbj)>0,\ j=1,\ldots,u.$

उपपत्ति : यदि $t=0$, तो (3.9) तथा (4.1) के आधार पर

$$\left(\sin\frac{\pi w}{L}\right)^{w-1} G^{u,v}_{p,q}\left[z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d}\middle|\begin{matrix}a^p\\ b^q\end{matrix}\right] \tag{4.3}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[\cos\lambda_n x+\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right].$$

(4.3) के दोनों पक्षों में $\left[\cos\lambda_m x+\frac{h}{\lambda_m}\sin\lambda_m x\right]$ से गुणा करने तथा x के प्रति 0 से L तक समाकलन करने पर

$$\int_0^L\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}\left[\cos\lambda_m x+\frac{h}{\lambda_m}\sin\lambda_m x\right]G^{u,v}_{p,q}\left[z\left(\sin\frac{\pi x}{L}\right)^{2d}\middle|\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right]dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\int_0^L\left[\cos\lambda_n x+\frac{h}{\lambda_n}\sin\lambda_n x\right]\left[\cos\lambda_m x+\frac{h}{\lambda_m}\sin\lambda_m x\right]dx.$$

अब (2.1), (2.2) तथा (1.3), की सहायता से हमें (4.4) प्राप्त होगा

$$C_m=\frac{2L\lambda_m^2}{\sqrt{(\pi d)}\,[(\lambda_m^2+h^2)L+2h]}$$

$$\times\left\{\cos\frac{\lambda_m\pi}{2}\,G^{u,v-2d}_{p+2d,q+2d}\left[z\left|\begin{matrix}\triangle(2d,\,1-w),\,a_p\\ b_q,\,\triangle\left(d,\frac{1-w-\lambda_m}{2}\right),\triangle\left(d,\,\frac{1-w+\lambda_m}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]\right.$$

$$\frac{h}{\lambda_m}\left(\sin\frac{\lambda_m\pi}{2}\left(G^{u,v+2d}_{p+2d,q+2d}\left[z\left|\begin{matrix}\triangle(2d,\,1-w);\,a_p\\ b_q,\,\triangle\left(d,\,\frac{1-w-\lambda_m}{2}\right),\triangle\left(d,\frac{1-w+\lambda_m}{2}\right)\end{matrix}\right.\right]\right\}\right. \cdot \quad (4.4)$$

(3.9) तथा (4.4) से (4.2) प्राप्त होता है।

निर्देश

1. बाजपेयी, एस० डी०, Proc. Camb. Phil. Soc., 1968, **64**, 1049-1054.
2. वही, J. Sci. Engg. Res. 1969, XIII—1, 149-152.
3. वही, J. Sci. Engg. Res. 1969, XIII—2, 254-257.
4. वही, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1969, **12** (11), 93-97.
5. वही, Proc. Indian Acad. Sci., 1969. **LXX**. 697-701.
6. वही, Proc. Camb. Pill. Soc. 1969, **66**, 349-353.
7. वही, Math. Education, 1969, **74**, 1-4.
8. वही, Jour. Math. Phys. Sci., 1970, **4**, 302-307.
9. वही, Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1971, **41** (A), 320-351.
10. बाजपेयी, एस० डी० तथा अलहवाज, ए० वाई०, J. Indian Acad. Math. 1989, **11**, 52-59.
11. कार्सला, एच० एस० तथा जीगर, जे० सी०, Conduction of heat in solids. Clarendon Press Oxford, 1986.
12. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher transcendental functions, Vol. 1. McGraw Hill, New York, 1953.
13. ग्रैडशत्येन, आर० एस० तथा रिज़िक, आई० एम०, Tables of integrals, series and products. Academic Press, Inc., New York, 1980.
14. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, Lecture Notes in Maths. 348—Generalized hypergeometric functions with applications in statistics and {physical sciences. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.
15. वही, The H-function with applications in statistics and other disciplines. Wiley Eastern Ltd. New Delhi, 1978.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 33, No. 2, 1990

उराँव जनजाति की कुछ मानवमितीय मापों के पारस्परिक सहसम्बन्धों का अध्ययन

चतुर्भुज साहु
मानव विज्ञान विभाग, गिरिडीह कॉलेज, गिरिडीह (बिहार)

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन के लिए राँची जिले की उराँव-जनजाति के 159 असम्बन्धित बालकों की चार मानवमितीय मापों (कद एवं भार, कद एवं सिर की ऊँचाई, कद एवं शीर्ष-देशना और कद एवं फ्रोन्टो-पेरायटल देशना) के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक (*r*) को दर्शाया गया है। अध्ययन की सुविधा के लिए सभी बालकों को तीन आयु-समूहों में रखा गया। यह देखा गया है कि जैसे-जैसे कद का मध्यमान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे भार, शीर्ष-देशना तथा फ्रोन्टो-पेरायटल देशना का मध्यमान बढ़ता जाता हैं। 14-17 वर्ष के आयु-समूह में केवल कद एवं सिर की ऊँचाई में ही धनात्मक महत्वपूर्ण सह-सम्बन्ध पाया गया। ऐसी स्थिति संयोग-सैम्पलिंग तथा सम्भ्रान्त परिवारों से आये बच्चों के कारण हो सकती है।

Abstract

Study on the correlation of few anthropometric measurements of the Oraon. *By* Chaturbhuj Sahu, Department of Anthropology, Giridih College, Giridih (Bihar)

The purpose of the present study is to present the co-efficient of correlation('*r*') between four anthropometric measurements (stature & weight, stature & head height, stature & cephalic index and stature & frontoparietal index) of 159 unrelated boys of the Oraon tribe of Ranchi. The age of the boys ranged from 6 years to 17 years. For convenience, the data have been divided into three age-groups. It is observed that as the mean value of stature increases the mean values of weight, cephalic index and fronto-parietal index also show increment at the various age-groups. In the age group 14—17, significant positive correlation has been observed only in between stature and head height (+15.07) while other measurements show significant negative

correlation. This is perhaps due to the children coming from well-to-do families and chance sampling.

उराँव जनजाति उत्तरी-पूर्वी भारत की प्रमुख जनजातियों में से एक है, जो बिहार में मुख्य रूप से राँची (गुमला तथा लोहरदगा समेत) जिले में पायी जाती है। गुहा[1] ने इन्हें प्रोटो आस्ट्रोलवायड़ की संज्ञा दी है। शारीरिक मानव विज्ञान की दृष्टि से इस जनजाति में बहुत ही कम अध्ययन हुआ है। कर्क तथा अन्यों[2] ने रक्त-समूह के आधार पर तथा दास शर्मा[3] ने त्वचीय प्रतिरूप के आधार पर उराँव पर सामग्री प्रस्तुत की है लेकिन मानवमिति के आधार पर कोई भी सामग्री प्रकाशित नहीं हुई। उराँव ही नहीं बल्कि समस्त भारतीय लोगों में मानवमिति पर बहुत ही कम शोध कार्य हुआ है। बच्चों की वृद्धि के सम्बन्ध में कुछ कार्य हुए हैं। यह कटु सत्य है कि बच्चे बढ़ते हैं परन्तु वृद्धि की दर प्रत्येक बच्चे में अलग-अलग आयु में एकसमान नहीं होती तथा उन बच्चों में भी एकसमान नहीं होती है जिनका जन्म तथा लालन-पालन विभिन्न आर्थिक स्तर के परिवारों में होता है। विश्व के विभिन्न हिस्सों में किये गये अन्वेषणों से यह पाया गया है कि जिन बच्चों का लालन-पालन उत्तम आर्थिक स्तर के परिवार में हुआ वे अपनी ही उम्र के अन्य बच्चों की तुलना में अधिक लम्बे तथा अधिक भार वाले हुए हैं। मुखर्जी[4,5] ने उच्च विद्यालय, कलकत्ता के 2488 बच्चों तथा कलकत्ता के ही प्राइमरी विद्यालयों के बच्चों में अध्ययन के दौरान यह पाया है कि परिवार की आर्थिक स्थिति बच्चों के शरीर की वृद्धि में एक महत्वपूर्ण कारक हैं। मन्टागु[6] ने कहा है कि मानव की वृद्धि से सम्बन्धित अध्ययन के लिए आर्थिक स्तर की उपेक्षा करके अध्ययन करना संतोषप्रद नहीं होगा।

प्रस्तुत शोधकार्य में उराँव जनजाति के दो मापों के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्धों को दर्शाया गया है पर इसमें विभिन्न वर्ग-समूह में वृद्धि परिवर्तन नहीं दिखाया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिए 159 असम्बन्धित बालकों (बालिकायें नहीं) को मापा गया जिनकी उम्र 6 वर्ष से 17 वर्ष की थी। इसके लिए आर० सी० बालक मध्य विद्यालय बनारी, मध्य विद्यालय नरमा तथा आवासीय उच्च विद्यालय जोभीपाट से 'डाटा' उपलब्ध किये गये। 159 बालकों में से 22 बच्चे अपेक्षाकृत संभ्रान्त परिवारों के थे। शेष में से अधिकांश निम्न से निम्नतर आर्थिक स्थिति वाले परिवारों के थे। विद्यालय में अंकित उम्र को ही सही उम्र माना गया। मापने के लिए मार्टिन[7] की विधि अपनाई गयी तथा सभी मापों को मिमी० में अंकित किया गया। भार पौंड में लिया गया। इसके लिए जूतों को हटा दिया गया और शरीर पर कम-से-कम वस्त्र रखे गये।

परिणाम तथा विवेचना

अध्ययन की सुविधा के लिए सभी बालकों को तीन आयु-समूहों में रखा गया और आवश्यकता पड़ने पर यह माना गया कि यदि किसी बालक की उम्र 9 वर्ष 1 महीना से 6 महीना तक है तो उसे 9 वर्ष के अन्तर्गत रखा गया और यदि उसकी उम्र 9 वर्ष 7 महीने से ऊपर है तो उसे 10 वर्ष के

अन्तर्गत रखा गया। इसी प्रकार अन्य समूहों में भी किया गया। इस प्रकार प्रस्तुत शोधकार्य में आयु-समूहों में बालकों की संख्या निम्नलिखित है—

आयु-समूह	कुल संख्या
6—9	22
10—13	84
14—17	53
	159

सम्पूर्ण वृद्धि प्राप्त करने के लिए निम्न आयु-समूह को उसके बाद वाले उच्च आयु-समूह में से घटा दिया गया है तथा सम्बन्धित वृद्धि % की गणना निम्नलिखित सूत्र से की गई

$$\frac{M_2-M_1}{M_1} \times 100$$

जहां M_2 उच्च आयु-समूह का मध्यमान, M_1 निम्न आयु-समूह का मध्यमान। प्रस्तुत अध्ययन के लिए मापों के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक 'r' आंकने के लिए वेली[8] के द्वारा प्रतिपादित नियम अपनाया गया तथा पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक 'r' को महत्वपूर्ण होने के लिए 't' का मान (स्टुडेन्ट्स 't' टेस्ट) की गणना निम्नलिखित सूत्र से की गई

$$'t' = \frac{r\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{(1-r^2)}}$$

जहाँ

r=सहसम्बन्ध गुणांक, n= नमूनों की संख्या

निम्नलिखित मापों के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक निकाला गया है—

(i) कद एवं भार (ii) कद एवं सिर की ऊँचाई

(iii) कद एवं शीर्ष देशना (iv) कद एवं फ्रोन्टों-पेरायटल देशना

सारणी 1

विभिन्न आयु-समूहों में विभिन्न मापों से संबन्धित आंकड़े

आयु-समूह	माप	विस्तार	माध्य	संपूर्ण	संबन्धित वृद्धि प्रति वर्ष
6-9	कद	1169-1482	1274.2	—	—
	सिर की ऊँचाई	106-130	120.5	—	—
	शीर्ष देशना	66.7-83.5	72.6	—	—
	फोन्टो पेरायटल देशना	69.0-82.8	75.4	—	—
	भार	37-67	47.4	—	—
10-13	तथैव	1231-1688	1414.7	144.5	11.10
		106-136	118.8	1.7	1.4
		64.0-81.6	73.6	1.0	1.4
		68.7-84.8	75.3	—0.1	—0.1
		40-104	63.4	16	33.8
14-17	तथैव	1404-1737	1592.07	173.4	12.2
		106-137	121.5	2.7	2.3
		67.3-78.0	74.2	0.6	0.8
		68.5-83.3	75.8	0.5	0.7
		64-121	92.8	29.4	46.3

उपर्युक्त सारणी के विश्लेषण से यह प्राप्त होता है कि 6 से 17 वर्ष के बच्चों में जैसे-जैसे कद का मध्यमान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे भार शीर्ष देशना तथा फोन्टो पेरायटल देशना का मध्यमान बढ़ता जाता है। सिर की ऊँचाई का मध्यमान 6-9 वर्ष के आयु-समूह में 120.5 मिमी० है जो 10-13 वर्ष के आयु-समूह में थोड़ा कम (118.8 मिमी) देखा जाता है। लेकिन 14-17 वर्ष के आयु-समूह में पुनः बढ़ा हुआ मान (121.5 मिमी) प्राप्त होता है।

सारणी 2

विभिन्न आयु-समूह में पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक 'r'

सह-सम्बन्ध	6-9 वर्ष (n=22)		10-13 वर्ष (n=84)		14-17 वर्ष (n=53)	
	'r' का मान	't' का मान	'r' का मान	't' का मान	'r' का मान	't' का मान
कद एवं भार	+00±0.04	9.2*	+0.9±0.02	18.8*	−0.7±0.04	7.7*
कद एवं सिर की ऊँचाई	+0.1±0.2	1.46	+0.1±0.09	3.0*	+0.9±0.01	15.07*
कद एवं शीर्ष देशना	+0.1±0.2	1.46	+0.3±0.09	1.38	− 0.3±0.009	2.16*
कद एवं फ्रोन्टो पेरायटल देशना	+0.2±0.12	3.1*	−0.2±0.08	6.4*	−0.9±0.01	15.07*

*सार्थक अन्तर दर्शाता है (0.05 पर)

सारणी 2 से निम्नलिखित मुख्य बातें प्राप्त होती हैं—

(i) बालकों के आयु-समूह 6-9 एवं 10-13 में कद एवं भार के बीच सार्थक धनात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध पाया गया लेकिन 14-17 आयु-समूह में ऋणात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध देखा जाता है जबकि इस समूह में बालकों की संख्या प्रथम समूह से दुगुनी से भी अधिक है।

(ii) **कद एवं सिर की ऊँचाइ के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध** इन दोनो मापों के बीच सभी आयु-समूह में धनात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध देखा गया लेकिन सार्थक परिणाम 6—9 आयु-समूह को छोड़कर अन्य दोनों आयु-समूहों में प्राप्त होता है।

(iii) **कद एवं शीर्ष-देशना के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध** 6-9 एवं 10-13 आयु-समूह के बालकों के बीच दोनों का पारस्परिक सह-सम्बन्ध धनात्मक लेकिन निरर्थक पाया गया है जबकि 14-17 आयु-समूह के बालकों के बीच सार्थक ऋणात्मक सह-सम्बन्ध पाया गया।

(iv) **कद एवं फ्रोन्टो-पेरायटल देशना के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध** : इन दोनों मापों के बीच सार्थक धनात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध का मान सिर्फ 6-9 वर्ष के आयु-समूह के बीच आता है तथा शेष दोनों आयु-समूहों के बीच सार्थक ऋणात्मक पारस्परिक सह-सम्बन्ध प्राप्त होता है।

सारणी 1 से स्पष्ट है कि बालकों में जैसे-जैसे कद का मध्यमान बढ़ता जाता है वैसे-वैसे अन्य मापों का मध्यमान भी बढ़ता गया है। लेकिन सारणी 2 में दो मापों के बीच पारस्परिक सह-सम्बन्ध गुणांक (r) के मान में थोड़ा अन्तर पाया गया। संयोग-सैंपलिंग तथा संभ्रान्त परिवारों से आये बच्चों के कारण ऐसी स्थिति हो सकती है।

निर्देश

1. गुहा, बी० एस० "द रेसियल एफिनिटिज ऑफ द पिपुल ऑफ इंडिया" सेंसस ऑफ इंडिया 1935 भाग 1 खंड III, दिल्ली
2. कर्क, आर० एल०, एल० वाई० सी० लाई, जी० एच० भो तथा एल० पी० विद्यार्थी "ए जेनेटिकल स्टडी ऑफ दी उराँव ऑफ छोटानागपुर प्लेटु" इन सम आस्पेक्टस ऑफ अप्लाइड फीजिकल एन्थ्रोपोलोजी, 1963,52, 113-129.
3. दास शर्मा, पी०, **जनरल ऑफ सोसल रिसर्च**, 1978, XXI—2, 148-167.
4. मुखर्जी, आर०, **द इंडियन जरनल ऑफ स्टेटिक्स**, 1951, 2, 47-16.
5. मुखर्जी, आर०, **अप्लाइड एन्थ्रोपोलोजी इन इंडिया**, 1968, 508.
6. मोन्टागु, एम० एफ० ए०, स्प्रींगफिल्ड, यु० एस० ए०, 1960.
7. मार्टिन, आर०, **लेब्रबुच डर एन्थ्रोपोलोजी**, 1928, 1—2—3.
8. बेली, एन० टी० जे०, **स्टेटिसटिकल मेथड्स इन बायोलाजी**, 1959.